DYNAMIKA TUHÉHO TĚLESA

Př. 1. Jakou práci musíme vykonat, abychom setrvačník s momentem setrvačnosti 20 kg m² roztočili s frekvencí 120 Hz?

$J = 20\ kg\,m^2$

$f = 120\ Hz$

$W = ?\ (J)$

$$W = \Delta E_k = E_{k_2} - E_{k_1}$$

setrvačník je původně v klidu

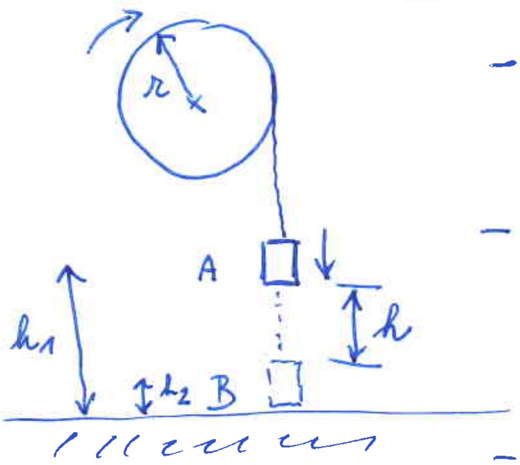
$\Rightarrow E_{k_1} = 0\ J$

$$E_{k_2} = \frac{1}{2} J\omega^2 \qquad \omega = 2\pi f$$

$$W = \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2} J (2\pi f)^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (2 \cdot 3{,}14 \cdot 120)^2 = 5{,}68 \cdot 10^6\ J$$

$$\doteq \underline{\underline{5{,}7\ MJ}}$$

Př. 2. Na obvodu kola o poloměru 0,4 m, jehož moment setrvačnosti je 1,2 kg m², je navinuté vlákno na jehož konci visí závaží o $m = 3{,}0$ kg. Kolo se otáčí kolem osy jdoucí jeho středem. Vypočti zrychlení závaží.



- v bodě A má závaží $E_{p_1} = mgh_1$

  $E_{k_1} = 0$

- v bodě B má závaží $E_{p_2} = mgh_2$

  a $E_{k_2} = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J\omega^2$

- platí-li zákon zachování energie, musí se změna potenciální energie ΔE_p rovnat změně kinetické energie ΔE_k

$$\Delta E_p = \Delta E_K$$

$$mgh_1 - mgh_2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \qquad h_1 - h_2 = h$$

h je dosavadní dráha, po které závaží zrychluje $\Rightarrow$ $h = \frac{1}{2} a t^2$ (*)

vytkneme mg nalevo a upravo za ω dosadíme ze vztahu $\omega = \frac{v}{r}$

$$mg\underbrace{(h_1 - h_2)}_{h} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \frac{v^2}{r^2}$$

vytkneme $\frac{1}{2} v^2$

$$mgh = \frac{1}{2} v^2 \left(m + \frac{J}{r^2}\right)$$

dosadíme za h z (*) a $v = at$

$$m \cdot g \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{a} \cancel{t^2} = \cancel{\frac{1}{2}} a^{\cancel{2}} \cancel{t^2} \left(m + \frac{J}{r^2}\right)$$

zkrátíme $\frac{1}{2} a t^2$

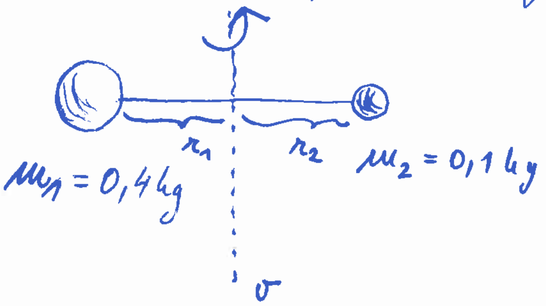
$$mg = a \left(m + \frac{J}{r^2}\right)$$

vyjádříme zrychlení $\underline{a}$ nebo dosadíme rovnou číselné hodnoty za m, g, J, r

$$a = \frac{mg}{\left(m + \frac{J}{r^2}\right)}$$

$$a = \frac{3 \cdot 10}{3 + \frac{1{,}2}{(0{,}4)^2}} \, m s^{-2} = \frac{30}{3 + 7{,}5} \, m s^{-2} = \underline{\underline{2{,}86 \, m s^{-2}}}$$

Př. 3 Dvě kuličky o hmotnostech 0,4 kg a 0,1 kg jsou spolu spojeny tyčí zanedbatelné hmotnosti, která má délku 0,8 m. Vypočti moment setrvačnosti soustavy vzhledem k ose, která je ⊥ k tyči a prochází jejím středem.



$l = 0,8\,m$

$r_1 = r_2 = \frac{l}{2} = 0,4\,m$

$J = ?\ (kg\,m^2)$

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = 0,4 \cdot 0,4^2 + 0,1 \cdot 0,4^2\ kg\,m^2$$

$$\underline{\underline{J = 0,08\ kg\,m^2}}$$

Př. 4 Setrvačník se otáčí kolem osy, vzhledem k níž má moment setrvačnosti 1,6 kg m². Vykonává 300 otáček za minutu. Vypočti jeho kinetickou energii.

$J = 1,6\ kg\,m^2$

$f = 300 / 1\,min = \frac{300}{60\,s} = 5\,Hz$

$E_k = ?\ (J)$

$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$

$\omega = 2\pi f$

$\omega = 2\pi \cdot 5\ rad\,s^{-1}$

$\omega = 31,4\ rad\,s^{-1}$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 31,4^2$$

$$E_k = 788,8\,J \doteq \underline{\underline{789\,J}}$$

Př. 5 Míč o hmotnosti 0,48 kg letí rychlostí $15\ ms^{-1}$ a současně rotuje kolem osy, vzhledem k níž má moment setrvačnosti $2{,}0 \cdot 10^{-3}\ kgm^2$, úhlovou rychlostí $70\ rad\ s^{-1}$. Vypočti E_k míče.

$m = 0{,}48\ kg$
$v = 15\ ms^{-1}$
$J = 2 \cdot 10^{-3}\ kgm^2$
$\omega = 70\ rad\ s^{-1}$

$E_k = ?\ (J)$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

– vše známe, stačí tedy jen dosadit

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot 0{,}48 \cdot 15^2 + \frac{1}{2}\, 2 \cdot 10^{-3} \cdot 70^2\ J$$

$$E_k = 54 + 4{,}9\ J = \underline{\underline{58{,}9\ J \doteq 59\ J}}$$

Př. 6. Setrvačník s $J = 50\ kgm^2$ se otáčí s $\omega = 10\ rad\ s^{-1}$. Jakou práci ~~musíme~~ vykonat motor pohánějící setrvačník, aby se jeho úhlová rychlost zvýšila na $20\ rad\ s^{-1}$?

$J = 50\ kgm^2$
$\omega_1 = 10\ rad\ s^{-1}$
$\omega_2 = 20\ rad\ s^{-1}$

$W = ?\ (J)$

– práce motoru se spotřebuje na zvýšení E_k setrvačníku

$$W = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}$$

$$W = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2 = \frac{1}{2} J (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

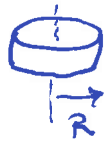
$$W = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot (20^2 - 10^2)\ J$$

$$\underline{\underline{W = 7500\ J}}$$

Př. 7. Tenkostěnný válec se otáčí kolem své rotační osy s frekvencí 15 Hz. S jakou frekvencí se musí otáčet plný stejnorodý válec stejných rozměrů i hmotnosti, aby měl stejnou E_k?

– tenkostěnný válec ⇒ prstenec ⇒ $J_0 = mR^2$

– plný válec ⇒ $J_0 = \frac{1}{2} mR^2$



$$E_{k_1} = E_{k_2}$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}} J_1 \omega_1^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}} J_2 \omega_2^2 \qquad \omega_1 = 2\pi f_1$$

$$\omega_2 = 2\pi f_2$$

prstenec plný válec

$$\cancel{m} \cancel{R^2} \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cancel{m} \cancel{R^2} \omega_2^2$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} \omega_2^2$$

$$\omega_2^2 = 2\omega_1^2 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{2}\,\omega_1 = \sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot 15 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\underline{\omega_2 = 133{,}2 \text{ rad s}}$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \underline{\underline{21{,}2 \text{ Hz}}}$$

Př. 8. Vypočti E_k tenké obruče o hmotnosti 0,4 kg která se valí bez prokluzování po rovině rychlostí 10 m s^{-1}?

$m = 0{,}4$ kg
$v = 10 \text{ ms}^{-1}$
$E_k = ?$ (J)

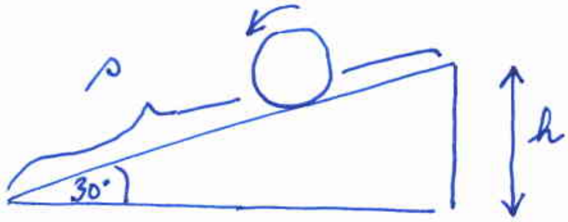
obruč: $J_0 = mR^2$ $v = \omega R$

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 + \underbrace{\frac{1}{2} J\omega^2}_{\text{zde musíme dosadit za } J \text{ a } \omega \text{ z}}$$

$$\frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2} m R^2 \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2} mv^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} mv^2 = mv^2 = 0{,}4 \cdot 10^2 \text{ J} = \underline{40 \text{ J}}$$

Př. 9. Stejnorodý plný válec se valí bez prokluzování po nakloněné rovině, svírající s vodorovnou rovinou úhel 30°. Vypočti zrychlení válce. Valivý odpor zanedbej. Řeš pomocí zákona zach. energie.



– výšku roviny označíme h
– délku roviny s

– válec se pohybuje se zrychlením dolů po nakloněné rovině $\Rightarrow$ $s = \frac{1}{2}at^2$, $v = at$

– ze zákona zach. energie plyne, že původní potenciální energie $E_p = mgh$ se celá přemění na kinetickou $E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$

$$\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

mezi h a s platí:

$$\sin\alpha = \frac{h}{s}$$

$$\underline{h = s \cdot \sin\alpha}$$

plný válec $J = \frac{1}{2}mR^2$

$\omega = \frac{v}{R}$

dosadíme za h: dosadíme za J a ω

$$mg\,s\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}mv^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m\cancel{R^2}\cdot\frac{v^2}{\cancel{R^2}}}_{\frac{1}{4}mv^2}$$

dosadíme za s:

$$mg\,\frac{1}{2}at^2\sin\alpha = \frac{3}{4}m v^2$$

zkrátíme m a 1/2 a dosadíme za v

$$g\,a\,t^2\sin\alpha = \frac{3}{2}a^2t^2$$

zkrátíme t^2, a

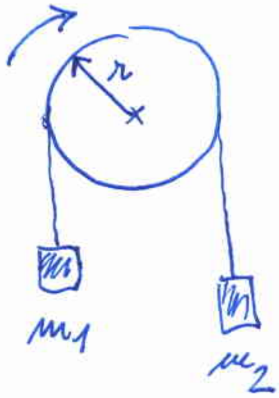
$$g\sin\alpha = \frac{3}{2}a$$

vyjádříme $\underline{a}$

$$a = \frac{2}{3}g\sin\alpha = \frac{2}{3}10\sin 30° = \frac{2}{3}\cdot 10\cdot\frac{1}{2}\ \mathrm{ms^{-2}}$$

$$\underline{\underline{a \doteq 3{,}3\ \mathrm{ms^{-2}}}}$$

Př. 10 Závaží o hmotnostech 3 kg a 5 kg jsou zavěšena na vlákně vedené přes kladku o poloměru 0,2 m a momentu setrvačnosti 0,04 kg m^2. Vypočti, s jakým zrychlením se závaží pohybují.



- závaží m_1 se posune nahoru o délku h $\Rightarrow$ jeho potenciální energie se tedy zvýší o

$$\Delta E_{p_1} = m_1 g h$$

- závaží m_2 se posune dolů o délku h $\Rightarrow$ jeho potenciální energie se tedy sníží o

$$\Delta E_{p_2} = m_2 g h$$

- celková změna potenciální energie celé soustavy je dána $\Delta E_p = \Delta E_{p_2} - \Delta E_{p_1} = m_2 g h - m_1 g h = (m_2 - m_1) g h$
- tato změna se projeví přírůstkem kinetické energie soustavy:

$$\Delta E_k = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v^2}_{\text{1. závaží}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_2 v^2}_{\text{2. závaží}} + \underbrace{\frac{1}{2} J \omega^2}_{E_k \text{ disku (kladky)}}$$

- ze 2. zach. energie musí platit $\Delta E_p = \Delta E_k$ $\Rightarrow$

$$(m_2 - m_1) g h = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \underbrace{\frac{1}{2} J \omega^2}_{\frac{1}{2} J \frac{v^2}{r^2}}$$

$$(m_2 - m_1) g \cdot \cancel{\frac{1}{2}} a t^2 = \cancel{\frac{1}{2}} v^2 \left(m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}\right)$$

$$(m_2 - m_1) g \cancel{a} \cancel{t^2} = a^{\cancel{2}} \cancel{t^2} \left(m_1 + m_2 + J/r^2\right)$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1) g}{\left(m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}\right)} = \frac{(5-3) \cdot 10}{\left(3 + 5 + \frac{0{,}04}{0{,}2^2}\right)} \, m s^{-2} = \underline{\underline{2{,}2 \, m s^{-2}}}$$

ω nahradíme ze vztahu $\omega = \frac{v}{r}$ a vytkneme $\frac{1}{2} v^2$

za h dosadíme $h = \frac{1}{2} a t^2$

za $v = a t$