

Měření logaritmického dekrementu kmitů v U-trubici

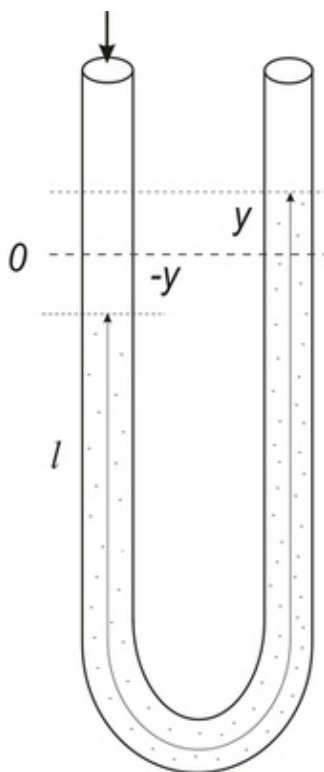
Online: <http://www.sclpx.eu/lab2R.php?exp=17>

Tento experiment, autorem publikovaný v [31] a [32], je z pohledu středoškolského učiva opět nastavbový a je zejména kvalitativní povahy, protože perioda tlumených kmitů se liší od periody netlumených kmitů téměř neměřitelně. Z kvantitativních měření proto můžeme provést jen výpočet koeficientu útlumu.

Pro žáky je spíše zajímavé teoretické odvození vztahu pro kmity vodního sloupce v U-trubici, které je provedeno v následující části.

Úvod

Kapalina uzavřená v U-trubici o vnitřním průměru d může kmitat, pokud kapalinový sloupec délky l vychýlíme z rovnovážné polohy o výchylku y , viz obrázek 2.6.1.



Obrázek 2.6.1 Rozbor oscilátoru – Kapalina v U-trubici – znázornění výchylky [84]

K odvození diferenciální rovnice kmitů můžeme vyjít opět z obecného vztahu $m y'' = F$, do kterého dosadíme na pravé straně rovnice sílu, která způsobí kmity sloupce. Touto výslednou silou je stejně jako u obyčejného kyvadla tíhová síla F_G , pro jejíž velikost můžeme odvodit vztah (2.6.1):

$$F_G = mg = V\rho g = 2yS\rho g \quad (2.6.1)$$

Analogicky s rovnicemi (1.7.2) a (1.7.3) můžeme zformulovat diferenciální rovnici (2.6.2a):

$$y'' + \frac{2g}{l} y = 0, \quad (2.6.2a)$$

$$y'' + 2b y' + \frac{2g}{l} y = 0, \quad (2.6.2b)$$

ze které můžeme určit frekvenci a periodu netlumených kmitů (2.6.3):

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}}, \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}} \quad (2.6.3)$$

Protože jsou kmity kapalinového sloupce výrazně tlumené, můžeme v souladu s řešením rovnice (2.6.2b) najít vztah (2.6.4) pro periodu tlumených kmitů:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{T_0^2} - \delta^2}}, \quad (2.6.4)$$

kde T_0 je perioda netlumených kmitů a δ je *konstanta tlumení oscilátoru* definovaná vztahem (2.6.6), viz [85]. Vztah (2.6.4) můžeme upravit do matematicky přehlednější podoby (2.6.5):

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2}} = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^2} \quad (2.6.5)$$

Pro *logaritmický dekrement* Λ pak platí

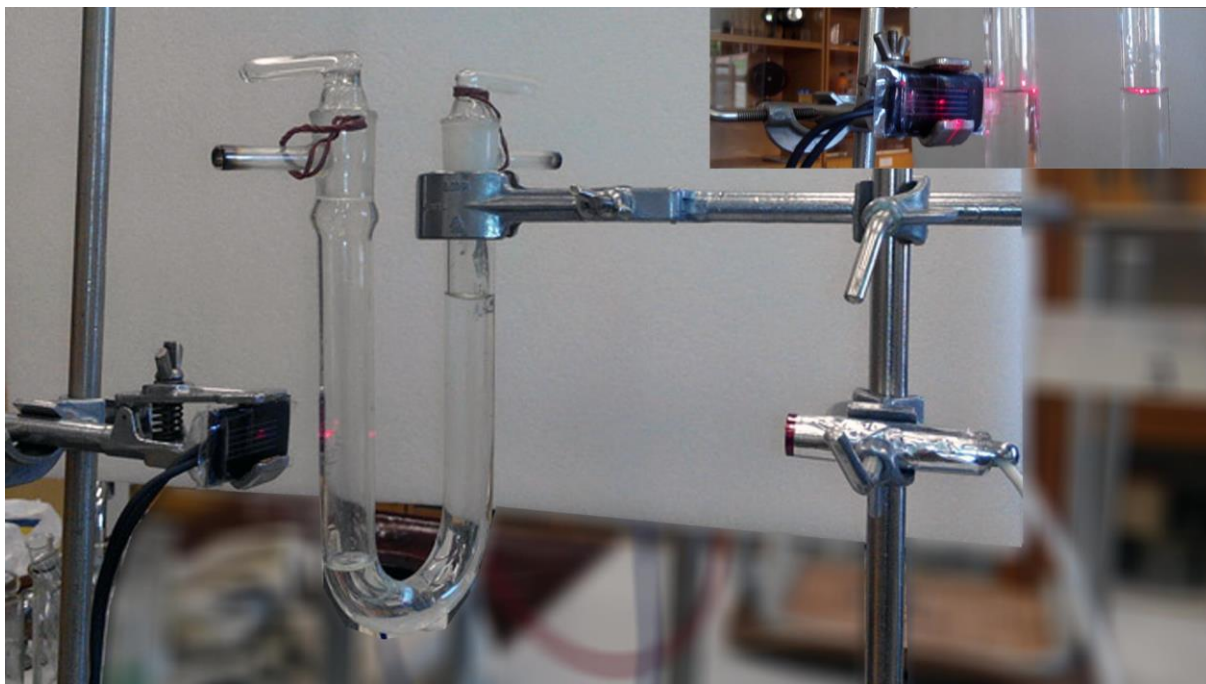
$$\Lambda = \delta T = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln \lambda, \quad (2.6.6)$$

kde T představuje periodu tlumených kmitů, A_n a A_{n+1} jsou dvě po sobě jdoucí amplitudy výchylky a λ je tzv. *útlum*. Logaritmický dekrement Λ charakterizuje pokles amplitudy tlumených kmitů za periodu T , viz [41].

Pomůcky: monogate, U-trubice se zábrusnými kohouty, stativový materiál

Postup práce

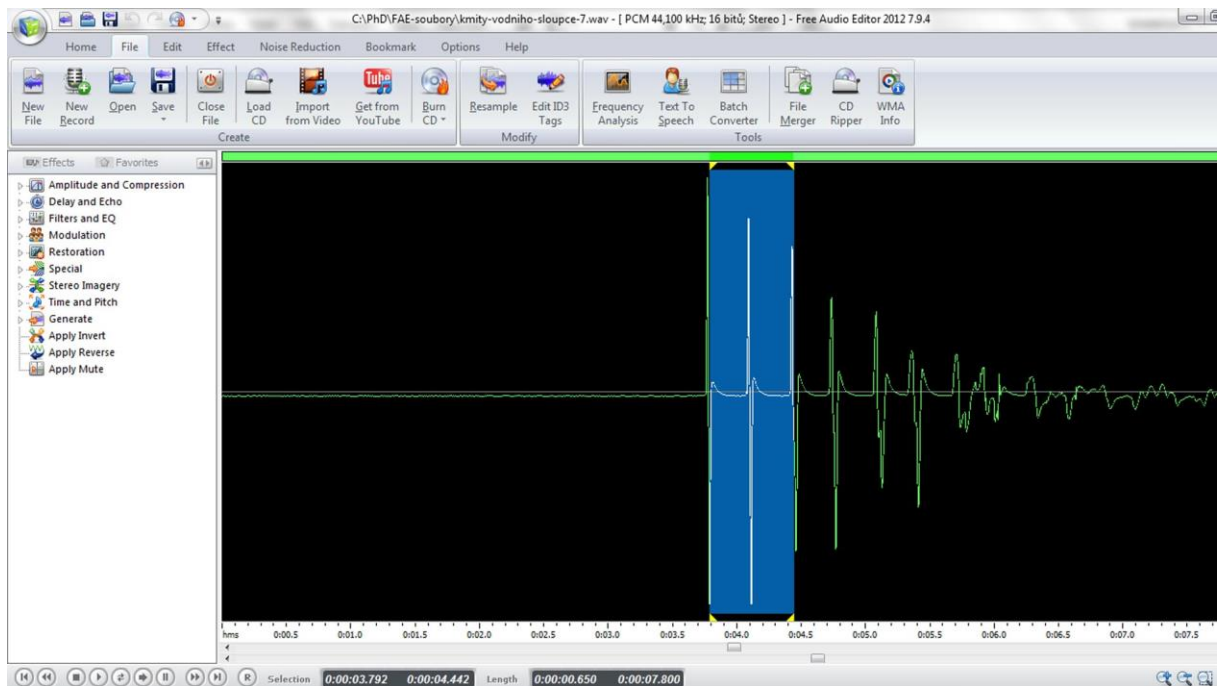
Uspořádání experimentu je na obrázku 2.6.2 s detailním pohledem v pravém horním rohu obrázku na laserový paprsek zaměřený na meniskus kapaliny v trubici v rovnovážné poloze kapalinového oscilátoru.



Obrázek 2.6.2 Uspořádání experimentu – Měření logaritmického dekrementu útlumu kmitů v U-trubici

Pro realizaci kmitů v U-trubici použijeme U-trubici opatřenou kohouty se zábrusem, které nám umožní udržet výchylku vodního sloupce v trubici. Oscilátor pak aktivujeme otočením kohoutu.

Nejprve v rovnovážné poloze kapaliny zaměříme laserový paprsek na meniskus v jednom rameni U-trubice. Pak vytvoříme v trubici fouknutím přetlak nebo nasátím podtlak, a v jednom rameni uzavřeme kohout. Druhý musí zůstat trvale otevřený nebo musí být druhé rameno bez kohoutu. Voda tak zůstane v nerovnovážné poloze s výchylkou y . Po spuštění měření v programu FAE otevřeme kohout a necháme proběhnout tlumené kmity vodního sloupce. Oscilogram kmitů můžeme vidět na obrázku 2.6.3. Vnitřní průměr trubice určíme posuvným měřidlem, kterým změříme průměr horního i spodního konce kónického zábrusu, a z těchto dvou hodnot vypočítáme průměrnou hodnotu, jejíž velikost je přibližně totožná s vnitřním průměrem U-trubice.



Obrázek 2.6.3 Oscilogram experimentu – Měření logaritmického dekrementu útlumu kmitů v U-trubici

Kmitů jsou dobře registrovatelné i bez obarvení vody a na obrázku 2.6.3 je dobře vidět i rychlý pokles amplitudy.

Pro vlastní odečet amplitudy je třeba v programu FAE změnit obvyklou vertikální stupnici z hodnoty *Sample Values* nebo *Decibel Values* na *Normalized values*. Nastavení provedeme na záložce nazvané *Options*, která obsahuje kartu pojmenovanou *Editor View*. Na ní se nachází dvě tlačítka: *Horizontal Scale* a *Vertical Scale*. Normalizovaná stupnice na vertikální škále má rozsah od 0 do 110 normalizovaných jednotek. Vzhledem k tomu, že při výpočtu koeficientu útlumu počítáme s poměrem dvou po sobě jdoucích amplitud, je jednotka stupnice nevýznamná. V dalším kroku jsme porovnali naměřenou hodnotu periody tlumených kmitů s výpočtem podle vztahu (2.6.4) nebo (2.6.5).

Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 2.6. Objem kapaliny v trubici u měření 1 až 5 byl $V = 31$ ml, u měření 6 až 10 byla jeho hodnota $V = 40$ ml. Vnitřní průměr trubice měl velikost $d = 15 \cdot 10^{-3}$ m. Z těchto hodnot lze určit délku vodního sloupce jako $l = \frac{4V}{\pi d^2}$, která pro prvních pět měření měla hodnotu $l = 0,176$ m, které odpovídá perioda netlumených kmitů $T_0 = 0,595$ s. Pro dalších pět měření vychází délka vodního sloupce $l = 0,227$ m a perioda $T_0 = 0,676$ s. Odečet amplitud A_n a A_{n+1} jsme provedli u prvních pěti měření nejprve pro první dvě největší hodnoty a pro dalších pět měření jsme amplitudy odečítali na třetím a čtvrtém píku. Logaritmický dekrement útlumu Λ jsme určili z rovnice (2.6.6), ze které

jsme vypočítali i koeficient tlumení δ ze vztahu $\delta = \frac{\Lambda}{T_{\text{exp}}}$. Hodnota periody T_{exp} byla určena experimentálně v programu FAE, hodnota periody T byla vypočítána ze vztahu (2.6.5).

Tabulka 2.6 Určení logaritmického dekrementu útlumu a periody tlumených kmitů

A_n	A_{n+1}	Λ	T_{exp} (s)	δ (s ⁻¹)	T (s)
100	90	0,105	0,575	0,183	0,595
107	95	0,119	0,571	0,208	0,595
105	85	0,211	0,575	0,367	0,595
107	90	0,173	0,576	0,300	0,595
107	95	0,119	0,568	0,210	0,595
60	47	0,244	0,650	0,375	0,677
74	47	0,454	0,645	0,704	0,678
73	45	0,484	0,644	0,752	0,678
65	47	0,324	0,649	0,499	0,677
60	45	0,288	0,661	0,436	0,677

Závěr

Z výsledků naměřených hodnot je patrné, že experimentálně určená perioda T_{exp} je vždy menší než T_0 , což odporuje teoretickému závěru, který plyne z rovnice (2.6.4) nebo (2.6.5). Vysvětlení tohoto jevu se nám prozatím nepodařilo najít. Průměrná hodnota periody tlumených kmitů byla určena v případě prvních pěti měření jako $T = (0,595 \pm 0,002)$ s, v případě druhých pěti měření jsme dospěli k hodnotě $T = (0,650 \pm 0,003)$ s. Z výše uvedeného vyplývá, že výpočet periody tlumených kmitů podle výše zmíněných vztahů potvrzuje hypotézu, že koeficient tlumení δ má na velikost periody zanedbatelný vliv a platí $T \doteq T_0$. Ke stejnému závěru dospěli i Tesař a Bartoš, viz [85].

Dále můžeme konstatovat, že logaritmický dekrement útlumu Λ vypočítaný z poměru A_3 a A_4 je v průměru 2.5 krát větší než ten, který je určený z poměru A_1 a A_2 . Tento rozdíl může být sice způsoben rozdílným množstvím kapaliny v trubici u prvních pěti a posledních pěti pokusů, ale ověřili jsme si, že i v rámci daných pěti měření není tato veličina konstantní, jak předpokládá teorie, ale hodnota Λ je u poměru třetího a čtvrtého píku přibližně dva krát větší než u poměru prvního a druhého píku. Předpokládáme, že se zde při pohybu kapaliny v U-trubici projevují další jevy (např. tření mezi stěnou trubice a kapalinou, viskozita kapaliny), které ovlivňují jak tlumení, tak periodu reálných kmitů.

Otázky na závěr

1. Naměřené hodnoty amplitud A_n vynesete v programu MS Excel do grafu a pomocí regresní analýzy ověřte, zda exponenciálně klesají, jak předpokládá teorie.
2. Jaká bude perioda tlumených kmitů v případě, že bychom měření zrealizovali s kapalinou o menší hustotě, např. s lihem?