

## Měření modulů pružnosti $G$ a $E$ z periody kmitů pružiny

Online: <http://www.sclpx.eu/lab2R.php?exp=2>

V tomto experimentu vycházíme z pojetí klasického pokusu s pružinovým oscilátorem. Z periody kmitů se obvykle určuje tuhost pružiny. Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou přesahuje obvyklý rámec středoškolského učiva a patří spíše do laboratorního praktika na vysoké škole. Na gymnáziu lze úlohu realizovat v rámci semináře, kde lze se žáky probrat souvislost mezi *Youngovým modulem*  $E$ , který znají z *Hookova zákona* jako modul pružnosti v tahu (tlaku), a modulem pružnosti ve smyku  $G$ .

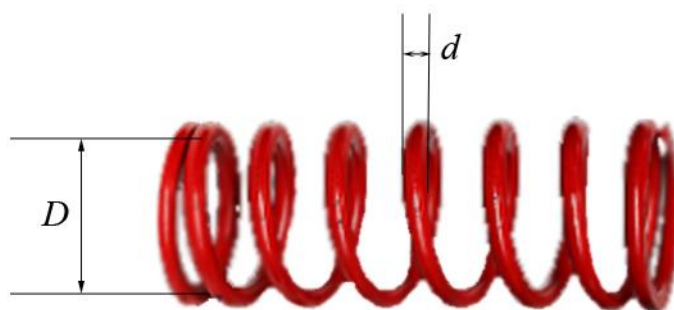
Používáme-li při experimentu pružinu, jejíž hmotnost je nezanedbatelná vůči hmotnosti závaží, musíme tuto hmotnost zahrnout do výpočtu periody, viz např. [82].

### Úvod

Jak plyne z klasické teorie pružnosti a zobecněného *Hookova zákona*, viz např. [5], [20], tuhost spirálové pružiny závisí na velikosti modulu pružnosti ve smyku  $G$ , který je jako základní elastická konstanta  $\mu$  pro homogenní izotropní těleso také znám jako jeden z *Lamého konstant*. Pro výpočet tuhosti pružiny platí tedy následující vztah (2.2.1):

$$k = \frac{G d^4}{8 n D^3}, \quad (2.2.1)$$

kde  $d$  je průměr drátu, ze kterého je pružina vyrobena,  $n$  je počet závitů pružiny a  $D$  je střední průměr spirály pružiny, jak ukazuje obrázek 2.2.1.



Obr. 2.2.1 Rozbor pružiny – Měření modulu pružnosti ve smyku a Youngova modulu

Pro frekvenci kmitů pružinového oscilátoru pak platí obecný vztah (2.2.2):

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_p}{3}}}, \quad (2.2.2)$$

kde  $k$  je tuhost pružiny,  $m$  je celková hmotnost závaží zavěšeného na pružinu a  $m_p$  je hmotnost pružiny, viz [82].

Dosadíme-li ze vztahu (2.2.2) do vztahu (2.2.1) za tuhost pružiny  $k$ , získáme výsledný vztah (2.2.3) pro modul pružnosti ve smyku  $G$  v závislosti na frekvenci kmitů pružiny  $f$ :

$$G = \frac{32 \pi^2 n D^3 \left(m + \frac{m_p}{3}\right) f^2}{d^4} = \frac{32 \pi^2 n D^3 \left(m + \frac{m_p}{3}\right)}{d^4 T^2} \quad (2.2.3)$$

Na závěr uvedme ještě i vztah (2.2.4) mezi *Youngovým modulem*  $E$  a modulem pružnosti ve smyku  $G$ :

$$G = \frac{E}{2(1 + \sigma)}, \quad (2.2.4)$$

kde  $\sigma$  je bezrozměrná, tzv. *Poissonova konstanta* (pozor, nezaměňovat se stejně pojmenovanou konstantou užívanou u adiabatického děje v teorii plynů), kterou lze určit z *Lamého koeficientů*  $\lambda, \mu$  podle vztahu (2.2.5):

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.2.5)$$

Tato konstanta  $\sigma$  představuje hodnotu poměru relativního příčného zkrácení k relativnímu podélnému prodloužení a je vždy kladná [5]. Tabulkové hodnoty pro ocel a železo, které jsou nejčastějším materiálem pro výrobu pružin, udává následující tabulka 2.2.1.

**Tabulka 2.2.1** Tabulkové hodnoty  $\sigma, E, G$  pro ocel a železo

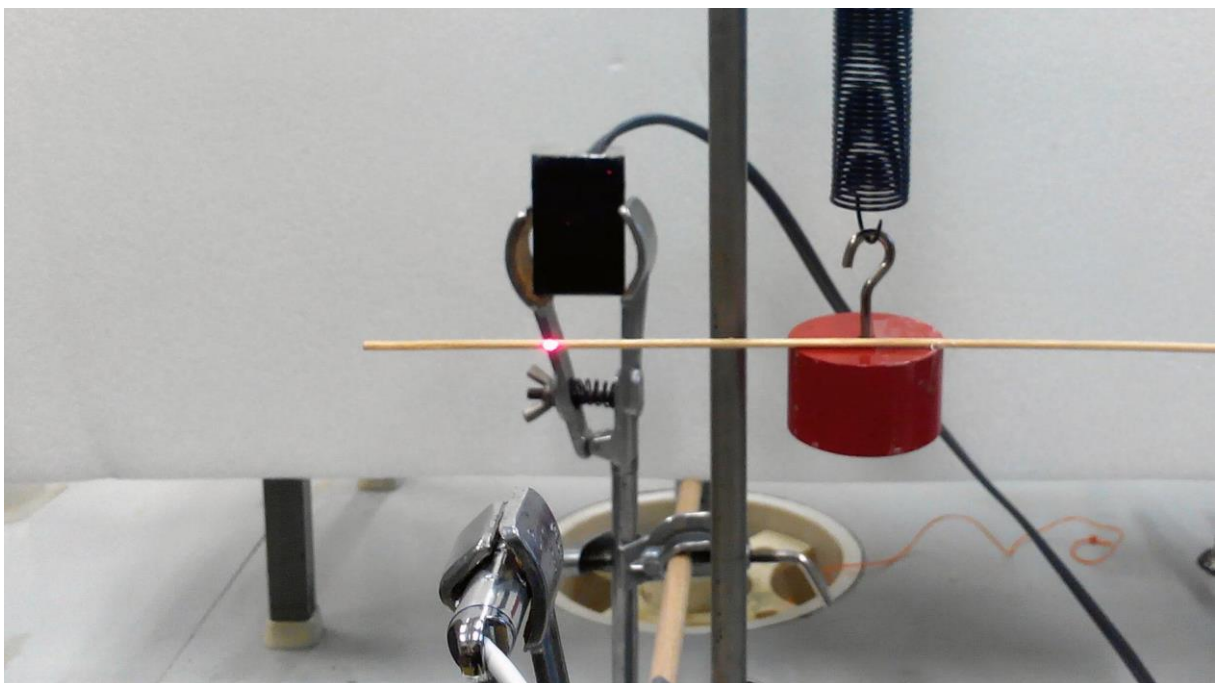
materiál	$\sigma$	$G$ (GPa)	$E$ (GPa)
ocel	0,30	85 – 88	220 – 240
železo	0,28	82	210

**Pomůcky:** monogate, pružina, závaží, izolepa, špejle, digitální váhy, stativový materiál

### Postup práce

Experimentální uspořádání je na obrázku 2.2.2. Nejprve zvážíme na digitálních váhách pružinu a určíme její hmotnost  $m_p$ . Posuvným měřidlem změříme vnější a vnitřní průměr spirály  $D_1$ , resp.  $D_2$ . Střední průměr  $D$  vypočítáme jako aritmetický průměr hodnot  $D_1$  a  $D_2$ . Dále zjistíme ještě hmotnost závaží, které budeme věšet na pružinu, a počet závitů pružiny.

Na závaží připevníme pomocí izolepy špejli a monogate sestavíme v horizontální poloze tak, aby v rovnovážné poloze oscilátoru (oscilátor je v klidu) mířil laserový paprsek na špejli.

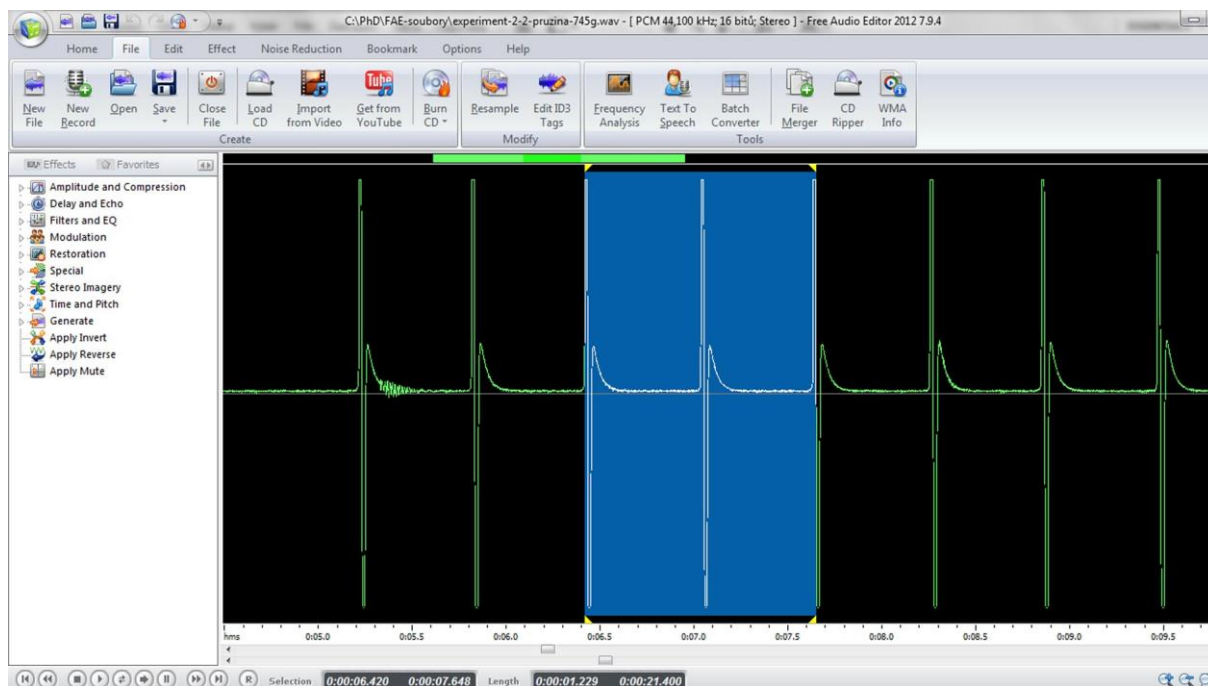


Obr. 2.2.2 Uspořádání experimentu – Měření modulu pružnosti

Oscilátor rozkmitáme a ve FAE provedeme záznam signálu, který můžeme vidět na obrázku 2.2.3. Modře je zvýrazněn výběr jedné periody mezi prvním a třetím píkem signálu.

Experimentálně určenou hodnotu periody  $T$  spolu s ostatními hodnotami veličin dosadíme do vztahu (2.2.3) a provedeme výpočet modulu pružnosti ve smyku  $G$  a *Youngova modulu*  $E$ .

Experiment opakujeme několikrát (minimálně pětkrát) pro různé hodnoty hmotnosti závaží  $m$ , přičemž před začátkem nového měření s novým závažím znovu nastavíme polohu monogatu tak, aby laser mířil na špejli.



Obr. 2.2.3 Oscillogram experimentu – Měření modulu pružnosti – výběr jedné periody

Absolutní nejistotu v určení modulu pružnosti ve smyku  $G$  vypočítáme pomocí analytických nástrojů MS Excel z následujícího vztahu (2.2.6)

$$\Delta G = \bar{G} \left( \frac{3\Delta D}{\bar{D}} + \frac{\Delta m}{\bar{m}} + \frac{\Delta m_p}{\bar{m}_p} + \frac{4\Delta d}{\bar{d}} + \frac{2\Delta f}{\bar{f}} \right), \quad (2.2.6)$$

který lze za zjednodušujícího předpokladu přesného určení průměrů  $d$  a  $D$ , hmotnosti závaží a hmotnosti pružiny zjednodušit na vztah (2.1.3):

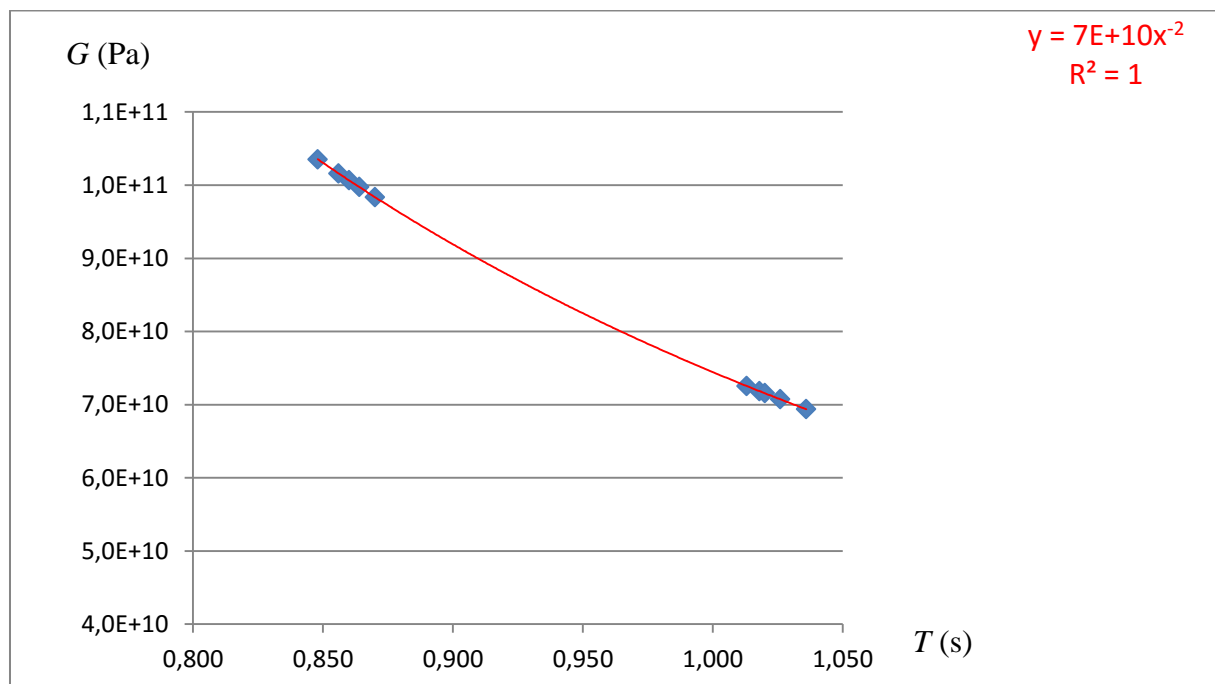
$$\Delta G = \bar{G} \left( \frac{2\Delta T}{\bar{T}} \right) = \Delta E \quad (2.2.7)$$

Protože podle vztahu (2.2.4) závisí výpočet *Youngova modulu*  $E$  na vynásobení modulu  $G$  určitou konstantou, je nejistota měření obou modulů stejná, tj.  $\Delta G = \Delta E$ .

Námi naměřené hodnoty udává následující tabulka 2.2.2. Na závěr vytvoříme graf závislosti modulu pružnosti ve smyku nebo tahu na periodě kmitů pružiny, který doplníme o regresní analýzu (Přidat spojnicí trendu). Graf vytvořený na základě tabulky 2.2.2 je na obrázku 2.2.4.

**Tabulka 2.2.2** Měření modulu pružnosti ve smyku a Youngova modulu

$m$ (kg)	$T_0$ (s)	$G$ (GPa)	$E$ (GPa)
0,445	0,860	101	262
0,445	0,856	102	264
0,445	0,848	104	269
0,445	0,870	98	256
0,445	0,864	100	259
0,545	1,013	73	189
0,545	1,036	69	180
0,545	1,018	72	187
0,545	1,020	72	186
0,545	1,026	71	184



Obr. 2.2.3 Graf závislosti modulu pružnosti ve smyku na periodě kmitů pružiny – Měření modulu pružnosti

## Závěr

Naměřené hodnoty uvedené v tabulce 2.2.2 se celkem dobře shodují s tabulkovými hodnotami v tabulce 2.2.1. U oceli záleží na typu a jejím složení, které však většinou neznáme. V tomto případě se může jednat pouze o orientační měření v rámci nějakého intervalu hodnot.

Průměrná hodnota modulu pružnosti ve smyku oceli určená z hodnot v tabulce 2.2.2 má velikost  $G = (86 \pm 1)$  GPa. Relativní nejistota měření je  $\delta G = 0,011628 \doteq 1 \%$ , což v dobré shodě s uspokojivým měřením realizovaným ve školní laboratoři. Hodnota je ve výborném souladu s tabulkovou hodnotou v intervalu (85 – 88) GPa.

Regresní funkce v grafu na obrázku 2.2.3 tentokrát není lineární, ale mocninná, což odpovídá odvozené závislosti (2.2.3), ve které platí  $G \sim \frac{1}{T^2}$ .

## Otázky na závěr

1. Ze vztahu (2.2.3) a (2.2.4) odvoďte závislost Youngova modulu  $E$  na periodě kmitů  $T$  a na základě analogie se vztahem (2.2.6) formulujte vztah pro absolutní nejistotu měření  $\Delta E$ .
2. Pokuste se odhadnout, jak by se změnilы výsledky výpočtů, kdybychom neuvažovali vliv hmotnosti pružiny.