6a) NEKONEČNÁ GEOMETRICKÁ ŘADA

Definice: Nekonečnou řadou nazýváme výraz

$$a_1 + a_2 + \dots a_n + \dots ,$$

který zapisujeme ve tvaru $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Čteme: „Suma od $n=1$ do ∞.

Máme dánu posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Od ní přejdeme k posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, kde s_n je součet prvních n členů posloupnosti a_n.

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$s_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}$

Tuto posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme posloupnost částečného součtu dané řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ posloupnosti a_n.

Je-li posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, říkáme, že nekonečná řada je konvergentní a příslušnou limitu nazýváme součet nekonečné řady (s).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Jestliže posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je divergentní, říkáme, že nekonečná řada je divergentní.

Příklad 1: Rozhodněte, zda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ je konvergentní.

Řešení:
$$s_1 = a_1 = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = \underbrace{a_1 + a_2}_{\frac{2}{3}} + a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$\vdots$

$s_n = \frac{n}{n+1}$, má limitu? ... $(s_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$. Řada je konvergentní.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Nekonečná geometrická řada, pro kterou $a_1 \neq 0$, je konvergentní, právě když pro její kvocient q platí $|q|<1$. V tom případě je její součet

$\boxed{s = \frac{a_1}{1-q}}$, což lze zapsat $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}}$

Příklad 2: Dokažte, že nekonečná geometrická řada je konvergentní a pak určete její součet.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-n} \quad \dots = \frac{1}{5^1} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} \Rightarrow q = \frac{1}{5}, \; |\frac{1}{5}| = \frac{1}{5} < 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-n} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{20} = \boxed{\frac{1}{4}}$ je součet g. řady

---

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 8 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}$

$a_1 = 8 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^0 = 8, \quad a_2 = 8 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^1 = 7, \quad a_3 = 8 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{8}$

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \frac{a_2}{a_1} = \frac{7}{8} \\ q_2 &= \frac{\frac{49}{8}}{7} = \frac{7}{8} \end{aligned}\right\} q = \frac{7}{8} \; ; \; |\tfrac{7}{8}| = \tfrac{7}{8} < 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} 8 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} = \frac{8}{1-\frac{7}{8}} = \frac{8}{\frac{1}{8}} = \boxed{64}$ je součet g. řady

---

Dodatek k předchozímu příkladu: Kvocient q lze určit obecně:

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{8} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1+1}}{\cancel{8} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^n}{\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}} = \left(\frac{7}{8}\right)^n \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{1-n} = \cancel{\left(\frac{7}{8}\right)^n} \cdot \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^1}{\cancel{\left(\frac{7}{8}\right)^n}} = \frac{7}{8}$$

Příklad 3: Pro která $x \in \mathbb{R}$ je nekonečná geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n$ konvergentní?

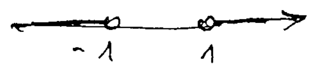
Řešení: a) Určíme q: $a_{n+1} = \left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}, \; a_n = \left(\frac{1}{x}\right)^n$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{n}} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{n}} = \frac{1}{x}$$

b) Určíme podmínku, neboť musí platit $|q|<1$

$$\left|\frac{1}{x}\right| < 1 \ldots \frac{|1|}{|x|} < 1 \ldots \frac{1}{|x|} < 1 \Rightarrow \underbrace{|x|>1}_{\text{podmínka}} \quad \left\langle \begin{array}{l} x>1 \\ x<-1 \end{array}\right.$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1}$$



S podmínkou, že $|x|>1$ je $s=\frac{1}{x-1}$

Příklad 4.: Je nekonečná geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n}$ konvergentní? V kladném případě určete s_n.

Řešení: $a_n = 10^{-n}$, $a_{n+1} = 10^{-(n+1)} = 10^{-n-1}$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10^{-n-1}}{10^{-n}} = \frac{10^{-n}\cdot 10^{-1}}{10^{-n}} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \qquad ; \quad a_1 = 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0{,}1}{1-0{,}1} = \frac{0{,}1}{0{,}9} = \frac{1}{9} \qquad \boxed{s=\frac{1}{9}}$$

Řada je konvergentní.

Příklad 5: Jsou následující řady konvergentní? V kladném případě určete jejich součet.

a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}$

$$q_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \quad q_2 = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \longrightarrow q=\frac{1}{2} \quad \left|\frac{1}{2}\right|<1 \Rightarrow \text{je konverg.}$$

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \boxed{2}$$

---

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot 0{,}25^n$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = (-1)^0 \cdot 0{,}25^1 = 0{,}25 \\ a_2 = (-1)^1 \cdot 0{,}25^2 = -0{,}25^2 \end{array}\right\} q_1 = \frac{-0{,}25^2}{0{,}25} = -0{,}25$$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = -0{,}25^2 \\ a_3 = (-1)^2 \cdot 0{,}25^3 = 0{,}25^3 \end{array}\right\} q_2 = \frac{0{,}25^3}{-0{,}25^2} = -0{,}25$$

$|-0{,}25|<1 \Rightarrow$ řada je konvergentní.

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{0{,}25}{1-(-0{,}25)}=\frac{0{,}25}{1{,}25}=\frac{25}{125}=\boxed{\frac{1}{5}}$$

Příklad 6: Sečtěte g. řadu $1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}+\dots$

$$q=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\quad s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}=\boxed{\frac{2}{2+\sqrt{2}}}$$

Příklad 7: Řešte rovnice:

a) $\underbrace{(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3+\dots}_{\text{označme } s}=1$

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{(x-1)^2}{x-1}=x-1$$

Podmínka $|x-1|<1$

$$(x-1<1)\vee(-x+1<1)$$

$$\boxed{x<2}\quad\vee\quad -x<0$$

$$\boxed{x>0}$$

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{x-1}{1-(x-1)}=\frac{x-1}{2-x}$$

$$\frac{x-1}{2-x}=1\quad |\cdot(2-x)\quad ,\text{podm. } -x+2\neq 0$$

$$x\neq 2$$

$$x-1=2-x$$

$$2x=3\quad\Rightarrow\quad\boxed{x=\frac{3}{2}}$$

---

b) $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}2^{nx}}=1$

$$a_1=2^x,\ a_2=2^{2x},\ a_3=2^{3x},\ q=\frac{2^{2x}}{2^x}=2^{2x}\cdot2^{-x}=$$

$$=2^x$$

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{2^x}{1-2^x}\quad\text{a to }=1$$

$$\frac{2^x}{1-2^x}=1$$

$$2^x=1-2^x$$

$$2^x+2^x=1$$

$$2\cdot2^x=1$$

$$2^x=\frac{1}{2}$$

$$2^x=2^{-1}\quad\Rightarrow\quad\boxed{x=-1}$$

---

c) $\frac{8}{x+10}=\underbrace{1-\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{27}{x^3}}$

$$q=\frac{-\frac{3}{x}}{1}=-\frac{3}{x}$$

$$S=\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{x}\right)}=\frac{1}{1+\frac{3}{x}}=\frac{1}{\frac{x+3}{x}}=\frac{x}{x+3}\quad\text{a to}=\frac{8}{x+10}$$

$$\frac{8}{x+10} = \frac{x}{x+3}$$

$$8(x+3) = x(x+10)$$

$$8x + 24 = x^2 + 10x$$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2} = \begin{cases} 4 \\ -6 \end{cases}$$

Podmínka: $x \neq -10,\ x \neq -3$

$$\boxed{K = \{4; -6\}}$$

---

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \underbrace{1 - x + x^2 - x^3 + \dots}_{S}$ $\qquad q = \dfrac{-x}{1} = -x,\quad a_1 = 1$

$$S = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{1+x} \qquad (x \neq -1)$$

$$\sqrt{2}(1+x) = 2$$

$$1 + x = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$$

$$x = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \qquad \Big|\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} \implies \boxed{x = \sqrt{2} - 1}$$

---

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-1} = \frac{4x-3}{3x-4}$ $\qquad q = \dfrac{\frac{2}{x}}{1} = \dfrac{2}{x}$

$$a_1 = \left(\frac{2}{x}\right)^{1-1} = \left(\frac{2}{x}\right)^0 = 1$$

$$a_2 = \left(\frac{2}{x}\right)^{2-1} = \left(\frac{2}{x}\right)^1 = \frac{2}{x}$$

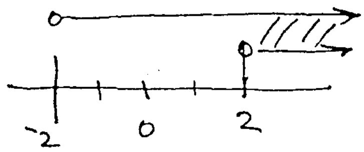
$$a_3 = \left(\frac{2}{x}\right)^{3-1} = \left(\frac{2}{x}\right)^2 = \frac{2^2}{x^2}$$

$$\left|\frac{2}{x}\right| < 1$$

$$\frac{2}{x} < 1 \quad \vee \quad -\frac{2}{x} < 1$$

$$x > 2 \quad \vee \quad -2 < x$$

$$x < -2$$



$$S = \frac{1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1}{\frac{x-2}{x}} = \frac{x}{x-2}$$

$$\frac{x}{x-2} = \frac{4x-3}{3x-4}$$

$$x(3x-4) = (x-2)\cdot(4x-3)$$

$$3x^2 - 4x = 4x^2 - 8x - 3x + 6$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} 6 \\ +1 \end{cases}$$

1 není v $(2; \infty)$

$$\boxed{K = \{6\}}$$

---

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^{(2n-2)} x = 2 \cdot \operatorname{tg} x$

$$a_1 = \sin^{(2.1-2)} x = \sin^0 x = 1x = x$$
$$a_2 = \sin^{(2.2-2)} x = \sin^2 x$$
$$q = \frac{\sin^2 x}{1} = \sin^2 x$$

$$S = \frac{1}{1-\sin^2 x}$$

$$\frac{1}{1-\sin^2 x} = 2 \cdot \mathrm{tg}\, x$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1 = 2 \cdot \frac{\sin x \cdot \cos^2 x}{\cos x}$$

$$1 = 2 \cdot \sin x \cos x$$

$$\sin(2x) = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in Z \quad | :2 \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z}$$

---

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \log x = 2$

$$a_1 = \frac{1}{2^{1-1}} \log x = \log x$$
$$a_2 = \frac{1}{2^1} \log x = \frac{1}{2} \log x$$
$$q = \frac{\frac{1}{2}\log x}{\log x} = \frac{1}{2}$$

$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\log x}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\log x}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \log x$, a to se rovná 2

$$2 \cdot \log x = 2$$
$$\log x = 1$$
$$\log_{10} x = 1$$
$$x = 10^1$$
$$\boxed{x = 10}$$

Příklad 8: Zjistěte, pro která $x \in R$ jsou nekonečné geometrické řady konvergentní, a určete jejich součty.

a) $1 + (x+3) + (x+3)^2 + \dots + (x+3)^{n-1}$

$$q = \frac{(x+3)^{n-1}}{(x+3)^{n-2}} = \frac{\cancel{(x+3)^n} \cdot (x+3)^{-1}}{\cancel{(x+3)^n} \cdot (x+3)^{-2}} = \frac{(x+3)^2}{x+3} = x+3$$

$$|q| < 1$$

$$|x+3| < 1 \Leftrightarrow (x+3 < 1) \vee (-x-3) < 1$$
$$(x < -2) \vee (x > -4) \Rightarrow x \in (-4; -2)$$

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-(x+3)}=\frac{1}{1-x-3}=\frac{1}{-2-x}=-\boxed{\frac{1}{2+x}}$$

S podmínkou, že $x\in(-4;-2)$ je g. řada konvergentní, její součet je $-\frac{1}{x+2}$.

---

b) $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\dots\frac{x}{2^{n-1}}$

$$q=\frac{\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^{n-1}}}=\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n-1}}}=\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{\cancel{2^n}\cdot 2^{-1}}{\cancel{2^n}}=\frac{1}{2}$$

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{x}{1-\frac{1}{2}}=\frac{x}{\frac{1}{2}}=\boxed{2x}$$

Řada je konvergentní. Její součet je $2x$.

Příklad 9: Vypočítejte:

nekonečná aritm. řada

$$\frac{1+2+3+\dots+n}{\underbrace{n+\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\dots\frac{n}{2^{n-1}}}_{\text{nekonečná g. řada}}}=\frac{S_1}{S_2}$$

$$S_1=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

$$S_1=\frac{n}{2}(1+n)$$

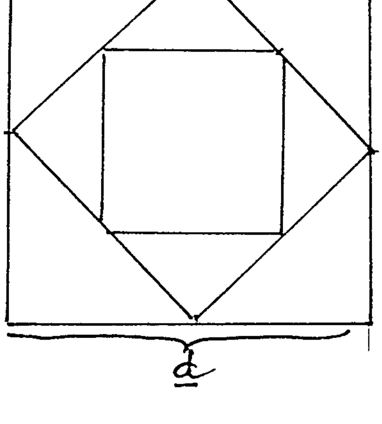
$$S_1=\frac{n(n+1)}{2}$$

S_2 … určíme $q=\frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{1}}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

$$S_2=\frac{a_1}{1-q}=\frac{n}{1-\frac{1}{2}}=\frac{n}{\frac{1}{2}}=2n$$

$$S=\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{2n}{1}}=\frac{n(n+1)}{4n}=\frac{n+1}{4}=\boxed{\frac{1}{4}(n+1)}$$

Příklad 10: Do čtverce se stranou délky d je vepsán další čtverec a do něj další čtverec tak, jak to posunující obrázek. Vypočítejte



d

a) součet obsahů
b) součet obvodů

takto získaných čtverců

Řešení na další stránce.

Délka strany

1. čtverec: d

2. " $\frac{1}{2}d\sqrt{2}$

3. " $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}d\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2} = \frac{1}{4}d\cdot 2 = \frac{1}{2}d$

4. " $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}d\right)\cdot\sqrt{2} = \frac{1}{4}d\sqrt{2}$

---

a) $S_1 = d^2\ (a_1)$

$S_2 = \left(\frac{1}{2}d\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{4}d^2\cdot 2 = \frac{1}{2}d^2\ (a_2)$

$S_3 = \left(\frac{1}{2}d\right)^2 = \frac{1}{4}d^2\ (a_3)$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{d^2}{2}}{\frac{d^2}{1}} = \frac{d^2}{2d^2} = \frac{1}{2}$$

Jde o geom. řadu, pro kterou $|q| = \frac{1}{2} < 1$. Proto

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{d^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{d^2}{1}}{\frac{1}{2}} = \boxed{2d^2}$$

Součet obsahů všech vepsaných čtverců je $2d^2$.

b) $o_1 = 4d\ (a_1)$

$o_2 = 4\cdot\frac{1}{2}d\sqrt{2} = 2d\sqrt{2}\ (a_2)$

$o_3 = 4\cdot\frac{1}{2}d = 2d\ (a_3)$

$o_4 = 4\cdot\frac{1}{4}d\sqrt{2} = d\sqrt{2}\ (a_4)$

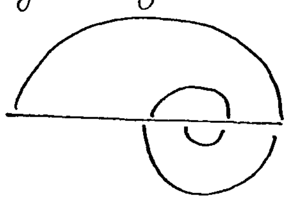
$q = \frac{2d\sqrt{2}}{4d} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$|q| \doteq 0{,}707 < 1$, jde o geometrickou řadu

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4d}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{4d}{1}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \boxed{\frac{8d}{2-\sqrt{2}}}$$

Pro $d = 1$ je $\frac{8\cdot 1}{2-\sqrt{2}}$ po úpravě $= 4(2+\sqrt{2})$

Příklad 11: „Spirála" se skládá z nekonečně mnoha půlkružnic. Přitom poloměr každé následující půlkružnice je 2krát menší než poloměr předchozí půlkružnice. Určete délku „spirály", je-li poloměr 1. půlkružnice 5 délkových jednotek.



Pro délku půlkružnice platí: $d = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$

a_1: Délka 1. půlkružnice je 5π

a_2: " 2. " $2{,}5\pi$

$q = \frac{2{,}5\pi}{5\pi} = \frac{1}{2}$

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{5\pi}{1-\frac{1}{2}} = \frac{5\pi}{\frac{1}{2}} = \boxed{10\pi}$$

Spirála má délku 10π.
