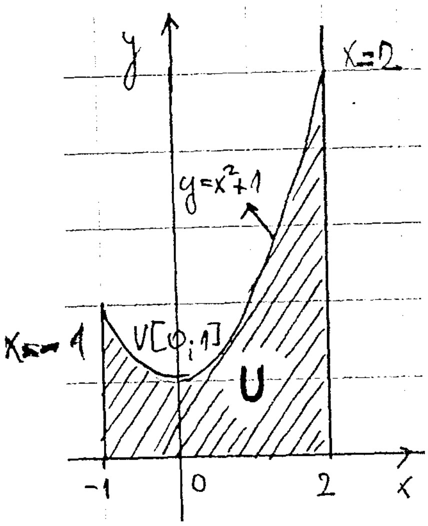
22a) UŽITÍ INTEGRÁLU K VÝPOČTU OBSAHU

Příklad 1 (16/166-MČ): Vypočítejte obsah útvaru U, který je ohraničen křivkou a přímkami:

a) $f: y = x^2+1,\ y=0,\ x=-1,\ x=2$ b) $f: y=-x^2+2x-3,\ y=0,\ x=0,\ x=3$

Řešení a)



$$S(U) = \int_{-1}^{2} (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3}+2-\left[\frac{(-1)^3}{3}+(-1)\right] =$$

$$= \frac{8}{3}+2-\left(-\frac{1}{3}-1\right) = \frac{8}{3}+2+\frac{1}{3}+1 = 6$$

Obsah útvaru U se rovná $\boxed{6}$ čtverečným jednotkám.

Řešení b): Abych si mohl nakreslit obrázek, tak si určím vrchol paraboly a funkční hodnoty v bodech $x=0, x=3$

$y' = -2x+2$, $y'=0$ $\quad -2x+2=0$

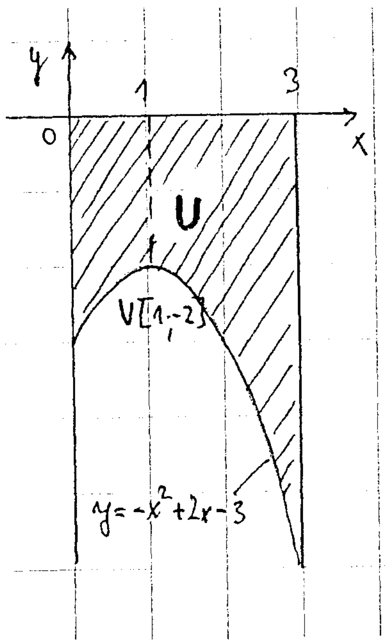
$x=1$

Pro $x=1$ je $y = -1^2+2.1-3 = -1+2-3 = -2$

Pro $x=0$ je $y=3$; pro $x=3$ je $y=-6$

Grafem funkce $y=-x^2+2x-3$ je parabola s vrcholem $V[1;-2]$

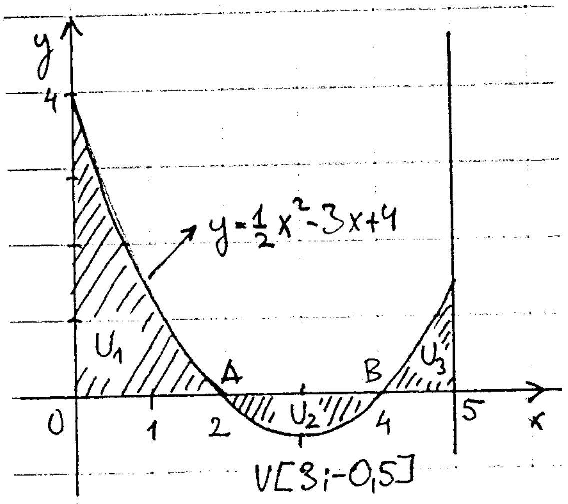
Protože útvar U je celý pod osou x, vyšel by určitý integrál záporná hodnota, proto platí:



$$S(U) = -\int_{0}^{3} (-x^2+2x-3)\,dx = -\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}-3x\right]_{0}^{3} =$$

$$= -\left[-\frac{3^3}{3}+3^2-3.3-0\right] = -\left(-\frac{27}{3}+9-9\right) = \boxed{9}$$

Příklad 2: Vypočítejte obsah útvaru ohraničeného parabolou o rovnici $y = \frac{1}{2}x^2-3x+4$, osou x, osou y a rovnoběžkou p s osou y procházející bodem $M[5;0]$.



Určíme vrchol paraboly pomocí extrému a její průsečíky s osou x.

$y' = x-3 \quad ; \quad x-3=0$
$\qquad\qquad\qquad x=3$

$y = \frac{1}{2}\cdot 3^2 - 3.3 + 4 = 4{,}5 - 9 + 4 = -0{,}5$

$V[3;-0{,}5]$

$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0 \quad |\cdot 2$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = <^4_2$ Parabola protíná osu x v bodech $A[2;0]$, $B[4;0]$

$U = U_1 + U_2 + U_3$

$$S(U) = \int_0^2 \left(\tfrac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right)dx - \int_2^4 \left(\tfrac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right)dx + \int_4^5 \left(\tfrac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_2^4 + \left[\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_4^5 =$$

$$= \underbrace{\frac{4}{3} - 6 + 8}_{S(U_1)} - \underbrace{\left[\frac{32}{3} - 24 + 16 - \left(\frac{4}{3} - 6 + 8\right)\right]}_{S(U_2)} + \underbrace{\left[\frac{125}{6} - \frac{75}{2} + 20 - \left(\frac{32}{3} - 24 + 16\right)\right]}_{S(U_3)} =$$

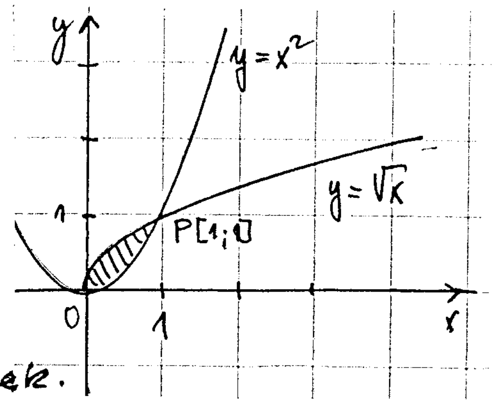
$$= \frac{4}{3} + 2 - \frac{32}{3} + 24 - 16 + \left(\frac{4}{3} - 6 + 8\right) + \frac{125}{6} - \frac{75}{2} + 20 - \frac{32}{3} + 24 - 16 =$$

$$= \frac{4}{3} + 2 - \frac{32}{3} + 8 + \frac{4}{3} + 2 + \frac{125}{6} - \frac{75}{2} + 20 - \frac{32}{3} + 24 - 16 = 40 - \frac{106}{3} = \boxed{4\tfrac{2}{3}}$$

čtverečných jednotek.

Příklad 3 (18/169 uč.): Vypočítejte obsah útvaru U, který je ohraničen křivkami, popř. ještě přímkou:

a) $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$



Řešení: Nejdříve určíme meze určitého integrálu, tj. x-ové souřadnice průsečíků obou křivek.

V bodech, v nichž se grafy protínají, mají obě funkce stejné hodnoty y, čili:

$y = y$

$\sqrt{x} = x^2$

$x = x^4$

$x^4 - x = 0$

$x(x^3-1) = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$

$$S(U) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^2)\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

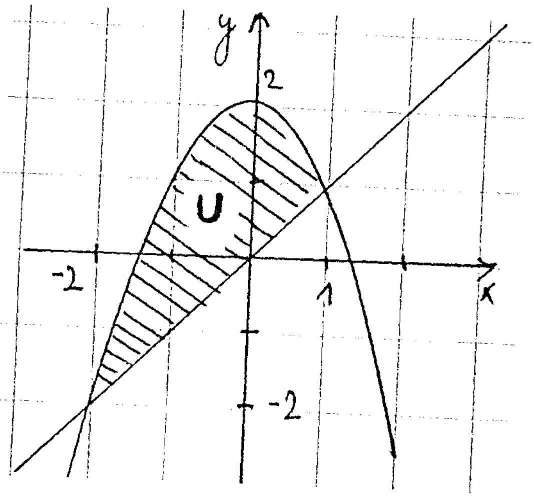
$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2.1\sqrt{1}}{3} - \frac{1^3}{3} - 0 =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$ čtv. jednotek.

---

b) $y = 2 - x^2$, $y = x$

$y = -x^2 + 2$



Meze: $y = y$

$2 - x^2 = x$

$x^2 + x - 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

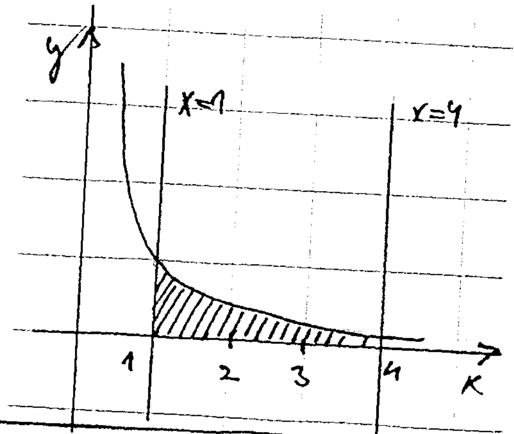
$$S(U) = \int_{-2}^{1} [(2-x^2) - x]\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\,dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} =$$

$$= 2.1 - \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} - \left[2.(-2) - \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2}\right] =$$

$$= 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + 2 = 8 - 3\tfrac{1}{2} = \boxed{4\tfrac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\right)}$$

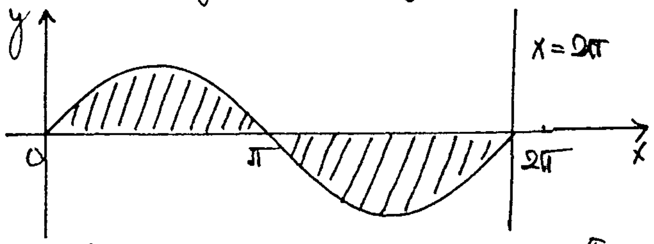
Příklad 4 (6.11/179): Vypočítejte obsah útvaru, který je ohraničen křivkou $y = \frac{1}{x}$ a přímkami $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.



$$S(U) = \int_1^4 \frac{1}{x}dx = \left[\ln|x|\right]_1^4 = \ln|4| - \ln|1| =$$

$\ln 4 - 0 = \boxed{\ln 4}$ .na kalkul. $\doteq \boxed{1{,}386}$

Příklad 5 (176/167 – uč.): Vypočítejte obsah útvaru omezeného funkcemi $y = \sin x$, $y=0$, $x=0$, $x=2\pi$

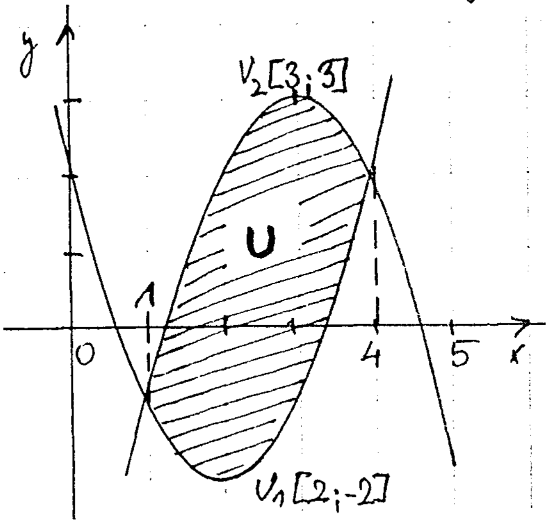


$$S(U) = \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \left(-\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx\right) = \int_0^{\pi} \sin x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx =$$

$$= \left[-\cos x\right]_0^{\pi} - \left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} + \left[\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) + \cos 2\pi - \cos\pi =$$

$$= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi = -(-1) + 1 + 1 - (-1) = 1+1+1+1 = \boxed{4}$$

Příklad 6: Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného parabolami s rovnicemi $y = x^2 - 4x + 2$, $y = -x^2 + 6x - 6$ (viz př. 3).



Obrázek není třeba kreslit. Přesto jsem ho namalovala. Vrcholy paraboly jsem určila pomocí extrému:

Extrém: $y' = 2x - 4$; $2x - 4 = 0$
$x = 2$

$y = 2^2 - 4.2 + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$; $V_1[2;-2]$

$y' = -2x + 6$; $-2x + 6 = 0$
$x = 3$

$y = -3^2 + 6.3 - 6 = -9 + 18 - 6 = 3$, $V_2[3;3]$

Meze: $y = y$

$x^2 - 4x + 2 = -x^2 + 6x - 6$

$2x^2 - 10x + 8 = 0 \quad | : 2$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

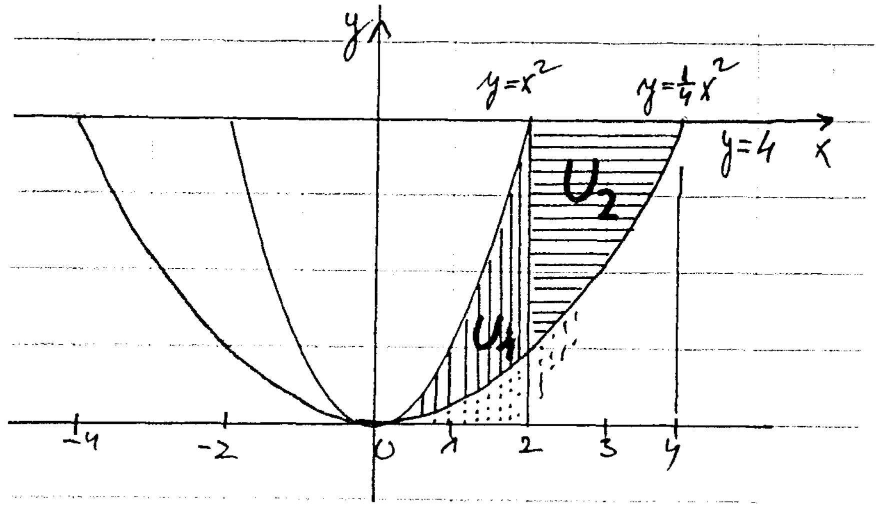
$$S(U) = \int_1^4 (-x^2 + 6x - 6) - (x^2 - 4x + 2) \, dx =$$

$$\int_1^4 (-2x^2 + 10x - 8) \, dx = \int_1^4 -2(x^2 - 5x + 4) \, dx =$$

$$= -2\int_1^4 (x^2 - 5x + 4) \, dx = -2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x\right]_1^4 =$$

$$= -2\left[\frac{64}{3} - 40 + 16 - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4\right)\right] = -2(-4{,}5) = 9$$

Příklad 7 (19/171-uč.): Vypočítejte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y=x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$ a přímkou $y=4$.



Protože jde o sudé funkce (souměrné podle osy y), tak stačí vypočítat obsahy U_1, U_2 ...

$$S(U)=[S(U_1)+S(U_2)]\cdot 2$$

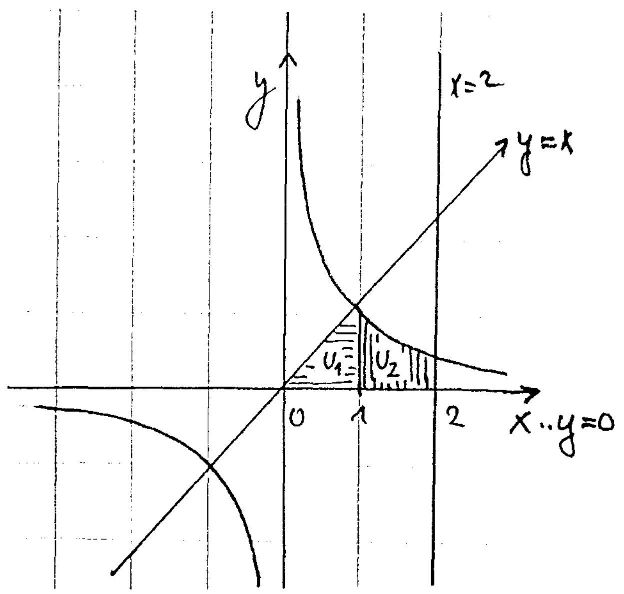
$$S(U_1)=\int_0^2\left(x^2-\frac{1}{4}x^2\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{12}\right]_0^2=\left[\frac{1}{4}x^3\right]_0^2=\frac{1}{4}\cdot 2^3-0=\boxed{2}$$

$$S(U_2)=\int_2^4\left(4-\frac{1}{4}x^2\right)dx=\left[4x-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_2^4=\left[4x-\frac{x^3}{12}\right]_2^4=16-\frac{16}{3}-\left(8-\frac{2}{3}\right)=$$

$$8-\frac{14}{3}=\boxed{3\frac{1}{3}\left(\frac{10}{3}\right)}$$

$$S(U)=2\left(2+\frac{10}{3}\right)=2\cdot 5\frac{1}{3}=\boxed{10\frac{2}{3}\left(\frac{32}{3}\right)}$$

Příklad 8: $f: y=\frac{1}{x}$, $y=x$, $y=0$, $x=2$



Z obrázku lze vyčíst, že $S(U_1)=\frac{1}{2}$ nebo

$$S(U_1)=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1^2}{2}-0=\boxed{\frac{1}{2}}$$

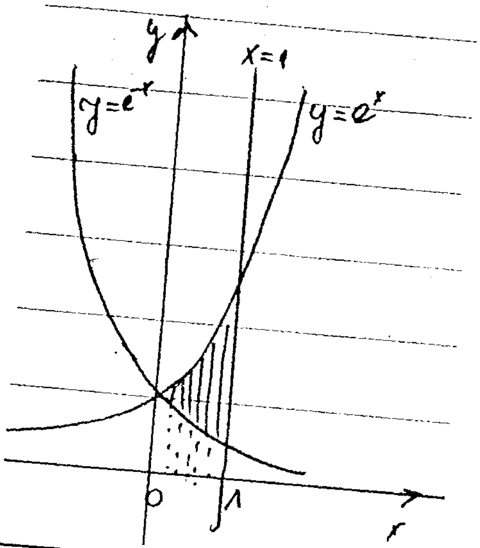
$$S(U_2)=\int_1^2\frac{1}{x}\,dx=\left[\ln|x|\right]_1^2=\ln|2|-\ln|1|=$$

$$=\ln 2-0=\ln 2 \quad (\doteq 0{,}693)$$

Výsledek: $S(U)=\boxed{\frac{1}{2}+\ln 2\ (\doteq 1{,}193)}$

Řešení.

Příklad 9: $f: y=e^x$ $g: y=e^{-x}$, $x=1$



$$S(U)=\int_0^1 (e^x-e^{-x})\,dx=[e^x-e^{-x}]_0^1=$$

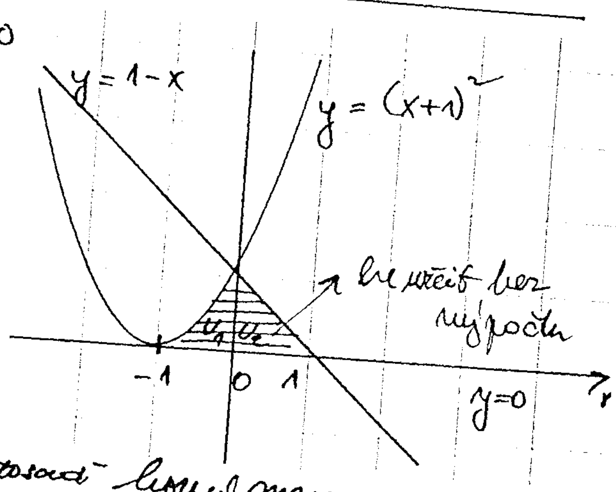
$$=e^1-e^{-1}-e^0-e^0= \quad \ldots\ 0 \text{ a } -0 \text{ je totéž}$$

$$=e-\frac{1}{e}-1+1=\boxed{e-\frac{1}{e}-2}\doteq 2{,}718-\frac{1}{2{,}718}-2$$

Na kalk. ALPHA e^x e [ln] $\boxed{\doteq 0{,}35}$

Obrázek je jen nákresný, není úplně přesný.

Příklad 10: $y=(x+1)^2$, $y=1-x$, $y=0$



$$S(U)=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\,dx+\int_0^1(1-x)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+x\right]_{-1}^{0}+\left[x-\frac{x^2}{2}\right]=$$

$$\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=$$ nejdříve dosadit horní mez

$$=0-\left[\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2+(-1)\right]+\left[1-\frac{1}{2}-0\right]=-\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{5}{6}}$$

Příklad 11: $y=\sqrt{2x}$, $x-y-4=0$, $y=0$

$y=x-4$

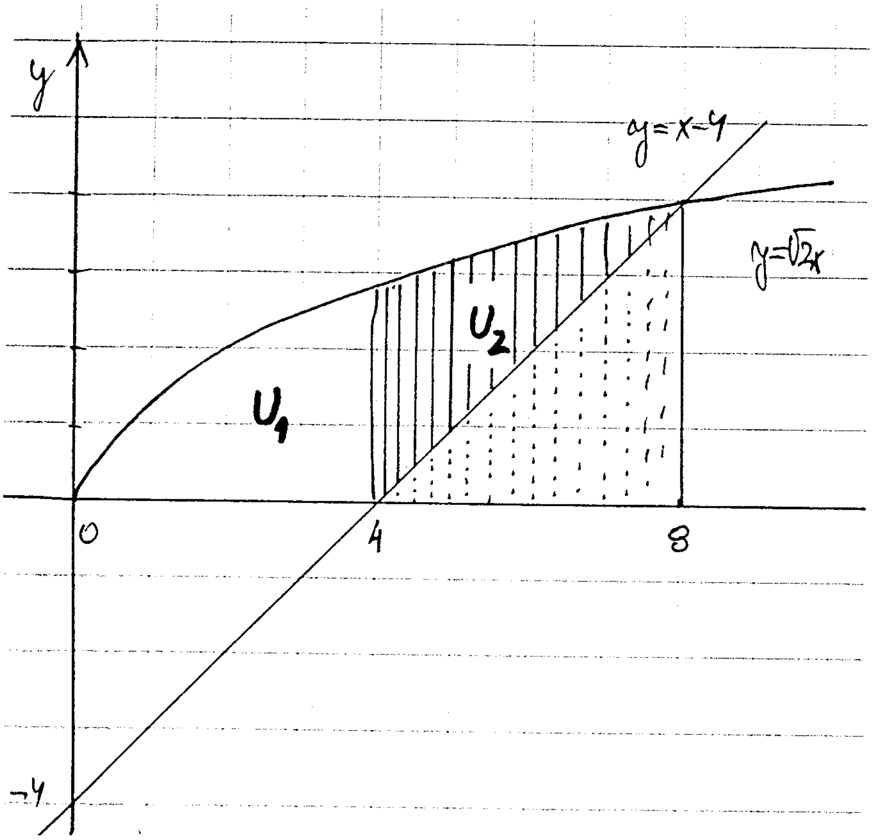
Meze: $\sqrt{2x}=x-4$

$2x=(x-4)^2$

$2x=x^2-8x+16$

$x^2-10x+16=0$

$$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{36}}{2}= \begin{cases} x_1=8 \\ x_2=2 \end{cases}$$



$$S(U_1) = \int_0^4 \sqrt{2x}\,dx =$$

$$= \int_0^4 \sqrt{2}\cdot\sqrt{x}\,dx = \int_0^4 \sqrt{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{2}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 =$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^4 =$$

$$\sqrt{2}\left[\frac{2}{3}\sqrt{64} - 0\right] =$$

$$\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 8 = \boxed{\frac{16\sqrt{2}}{3} = U_1}$$

$$S(U_2) = \int_4^8 \left[\sqrt{2x} - (x-4)\right]dx = \int_4^8 (\sqrt{2}\cdot\sqrt{x} - x + 4)\,dx \int_4^8 (\sqrt{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} - x + 4)\,dx =$$

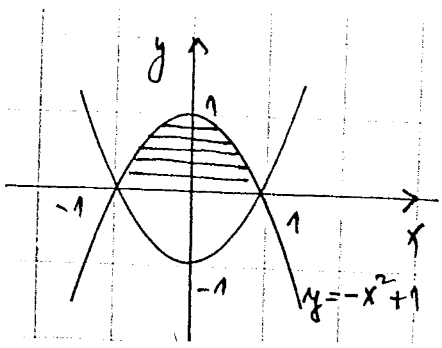
$$= \left[\sqrt{2}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 4x\right]_4^8 = \left[\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^2}{2} + 4x\right]_4^8 =$$

$$= \left[\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} + 4x\right]_4^8 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 8\sqrt{8} \cancel{-32+32} - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 4.2 - 8 + 16\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 8\cdot 2\sqrt{2} - \frac{16\sqrt{2}}{3} + 8 - 16 = \frac{32\cdot 2}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{3} - 8 = \boxed{\frac{64}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{3} - 8} = U_2$$

$$S(U) = S(U_1) + S(U_2) = \cancel{\frac{16\sqrt{2}}{3}} + \frac{64}{3} - \cancel{\frac{16\sqrt{2}}{3}} - 8 = \boxed{\frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}}$$

Příklad 12: $y = x^2 - 1$, $y = 1 - x^2$ ($y = -x^2 + 1$

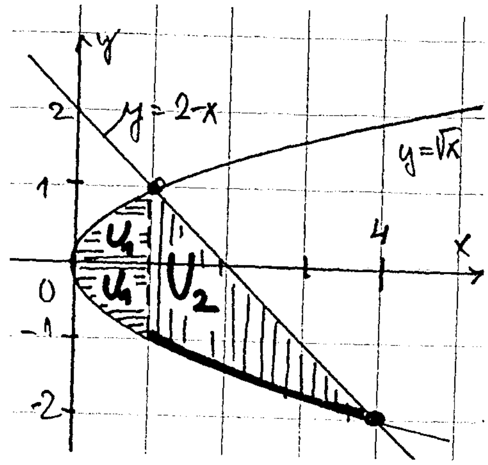


$$S = \int_{-1}^{1} 2(1 - x^2)\,dx = 2\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= 2\left[1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right] = 2\cdot\left(\frac{2}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= 2\cdot 1\frac{1}{3} = 2\cdot\frac{4}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

Příklad 13. Vypočítejte obsah útvaru ohraničeného parabolou $y^2=x$ a přímkou $x+y-2=0$.



Nejdříve určíme průsečíky přímky a paraboly.

$x+y-2=0 \qquad y^2=x \quad (y=\sqrt{x})$

$y=2-x \qquad y^2=y^2$

$y^2=(2-x)^2 \qquad (2-x)^2=x$

$4-4x+x^2=x$

$x^2-5x+4=0$

$x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{5\pm 3}{2}= \begin{cases}1\\4\end{cases}$

$S(U)=2\cdot S(U_1)+S(U_2)$

viz tlustá čára na grafu

$$S(U)=2\int_0^1\sqrt{x}\,dx+\int_1^4\left[\sqrt{x}+(2-x)\right]dx=2\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx+\int_1^4\left(x^{\frac{1}{2}}+2-x\right)dx=$$

$$=2\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1+\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+2x-\frac{x^2}{2}\right]_1^4=2\cdot\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}+2x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^4$$

$$=2\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2x-\frac{1}{2}x\right]_1^4=$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{1}+\left[\frac{2}{3}\sqrt{64}+8-8-\left(\frac{2}{3}\sqrt{1}+2-\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{4}{3}+\left(\frac{16}{3}-\frac{2}{3}-2+\frac{1}{2}\right)=\boxed{\frac{9}{2}}$$