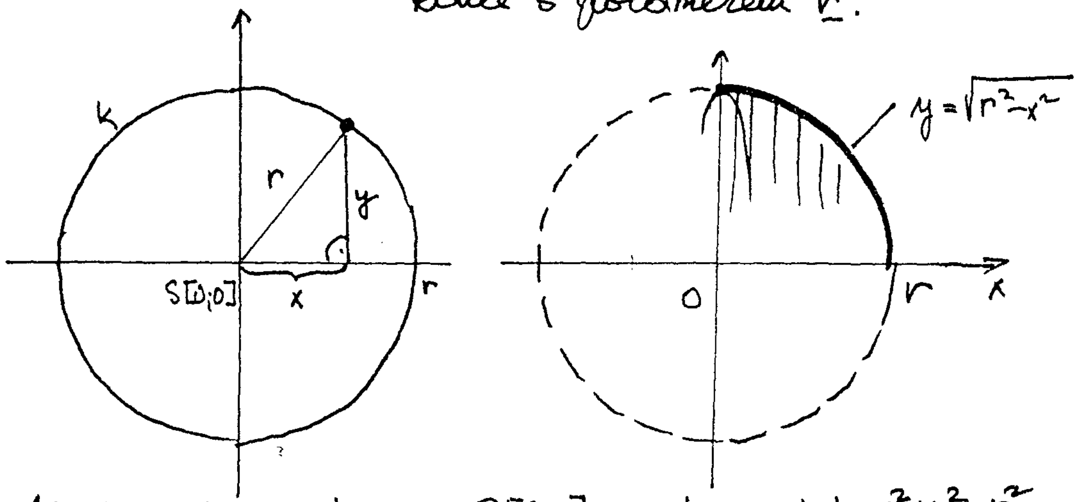
26 a) UŽITÍ INTEGRÁLU K VÝPOČTU OBJEMU ROTAČ. TĚLES

Příklad 1 (6.20/178) – uč. Odvoďte vzorec pro výpočet objemu koule s poloměrem r.



Kružnice k se středem $S[0;0]$ má rovnici $x^2+y^2=r^2$

$$y=\sqrt{r^2-x^2}$$

Výše šrafovaný obrazec (čtvrtkruh) je vymezen křivkou s rovnicí $y=\sqrt{r^2-x^2}$, přímkou $x=0$ (osou y) a $y=0$ (osou x). Objem polokoule vznikne rotací čtvrtkruhu kolem osy y (nebo x). Pro výpočet objemu rotačního tělesa, vzniklého rotací obrazce $U(f;a;b)$ kolem osy x platí:

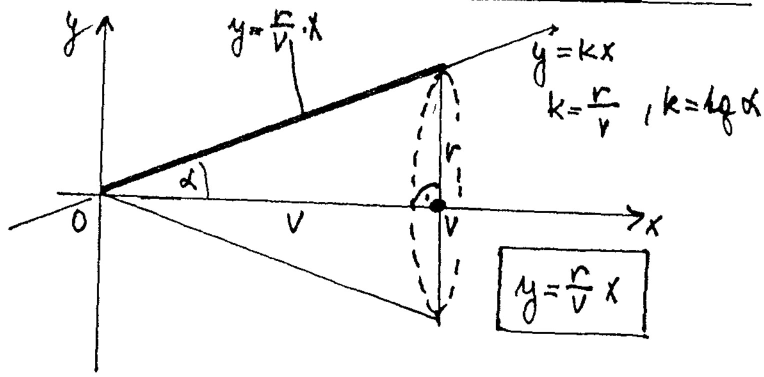
$$\boxed{V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

Koule vznikne spojením dvou polokoulí.

$$V=2\cdot\pi\int_0^r\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx=2\pi\int_0^r(r^2-x^2)\,dx=2\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=$$

$$=2\pi\left(r^2r-\frac{r^3}{3}-0\right)=2\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)=2\pi\,\frac{3r^3-r^3}{3}=\frac{2\pi}{3}\cdot 2r^3=\boxed{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

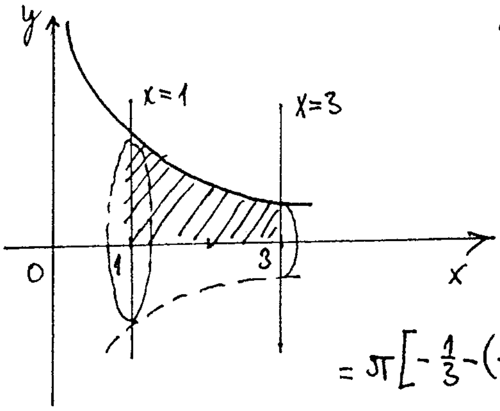
Příklad 2 (6.21/178 uč.): Odvoďte vzorec pro výpočet objemu rotačního kužele s poloměrem r a výškou v.



$$V = \pi \int_0^v \left(\frac{r}{v}x\right)^2 dx = \pi \int_0^v \frac{r^2}{v^2} x^2 dx = \frac{\pi r^2}{v^2} \int_0^v x^2 dx = \frac{\pi r^2}{v^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v =$$

$$= \frac{\pi r^2}{v^2}\cdot\left(\frac{v^3}{3} - 0\right) = \frac{\pi r^2}{v^2}\cdot\frac{v^3}{3} = \frac{\pi r^2 v}{3} = \boxed{\frac{1}{3}\pi r^2 v}$$

Příklad 3: Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného grafem funkce f a přímkami $y=0$, $x=a$, $x=b$ kolem osy x, jestliže:



a) $f: y = \frac{1}{x}$, $a=1$, $b=3$

$$V = \pi \int_1^3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx = \pi \int_1^3 x^{-2} dx =$$

$$= \pi\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^3 = \pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 =$$

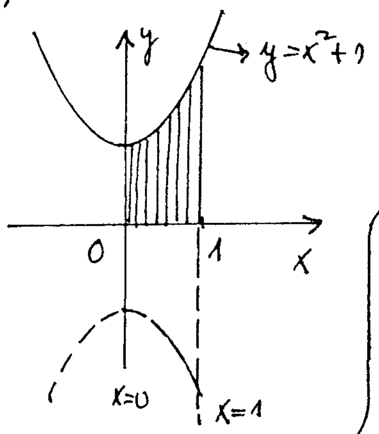
$$= \pi\left[-\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right] = \pi\left(-\frac{1}{3}+1\right) = \pi\cdot\frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{3}\pi}$$

---

b) $f: y = x^2+1$, $a=0$; $b=1$

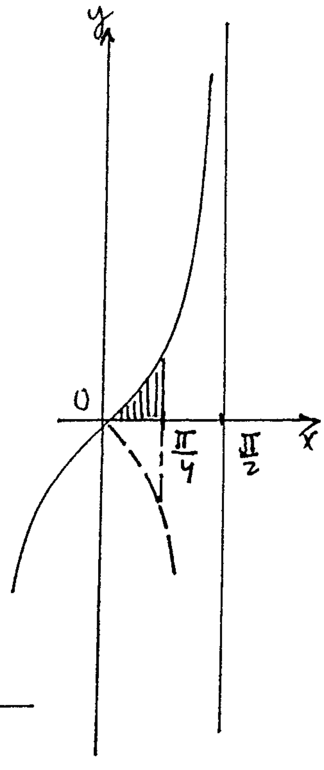
$$V = \pi \int_0^1 (x^2+1)^2 dx = \int_0^1 (x^4+2x^2+1) dx =$$

$$= \pi\left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right) = \boxed{\frac{28}{15}\pi}$$



c) $f: y = \operatorname{tg} x$, $a=0$, $b=\frac{\pi}{4}$

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx =$$



$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right) dx =$$

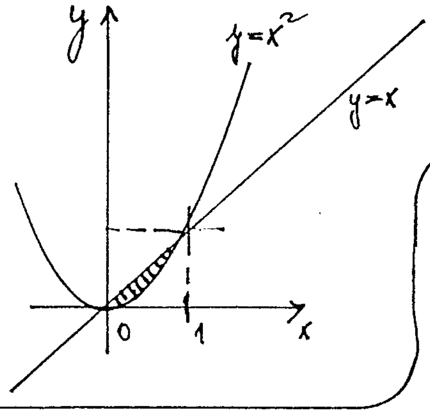
$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{\text{vzorec}} - 1\right) dx = \pi\left[\operatorname{tg} x - x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \pi\left[\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - (\operatorname{tg} 0 - 0)\right] = \pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \pi\cdot\frac{4-\pi}{4} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}\pi(4-\pi)}$$

Příklad 4: Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací obrazce, ohraničeného grafy funkcí f, g kolem osy x.

a) $f: y=x^2$, $g: y=x$



$$V=\pi\int_0^1\left[x^2-(x^2)^2\right]dx=\pi\int_0^1(x^2-x^4)\,dx=$$

$$=\pi\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-0\right)=\boxed{\frac{2}{15}\pi}$$

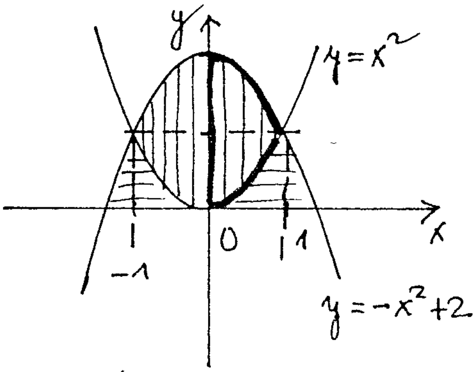
b) $f: y=x^2$, $g: y=2-x^2 \Rightarrow y=-x^2+2$

$y=y$

$x^2=-x^2+2$

$2x^2=2$

$x=\pm 1$



(x) zdvojnásobit

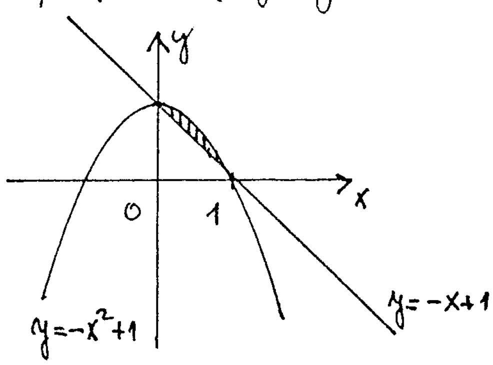
Vzhledem k souměrnosti podle osy y lze počítat v mezích 0; 1 a (x)

$$V=2\pi\int_0^1\left[(-x^2+2)^2-(x^2)^2\right]dx=2\pi\int_0^1(x^4-4x^2+4-x^4)\,dx$$

$$=2\pi\int_0^1(-4x^2+4)\,dx=2\pi\left[-4\cdot\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^1=2\pi\cdot\left[-\frac{4}{3}x^3+4x\right]_0^1=2\pi\left[-\frac{4}{3}\cdot 1^3+4\cdot 1-0\right]=$$

$$=2\pi\left[4-\frac{4}{3}\right]=2\pi\cdot 2\tfrac{2}{3}=2\pi\cdot\frac{8}{3}=\boxed{\frac{16}{3}\pi}$$

c) $f: y=1-x^2$, $g: y=-x+1$



$$V=\pi\int_0^1\left[(1-x^2)^2-(-x+1)^2\right]dx=$$

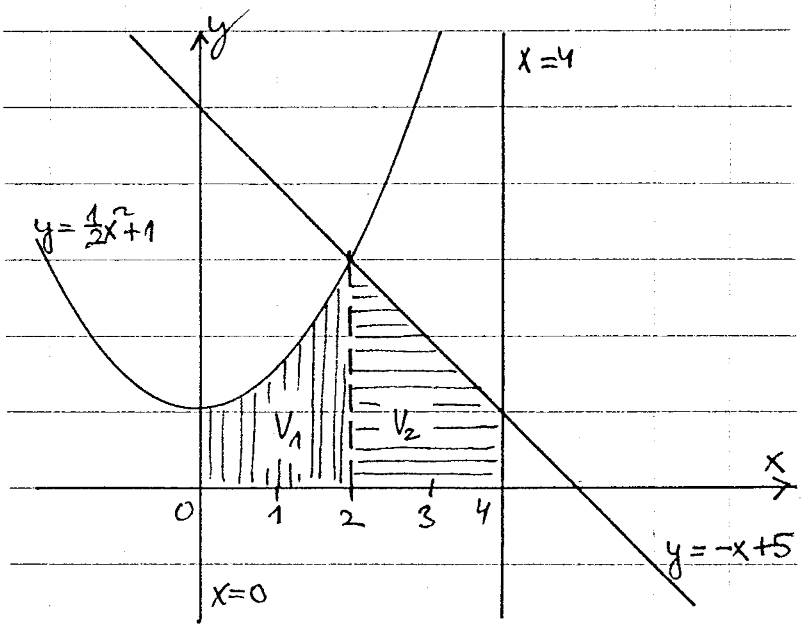
$$=\pi\int_0^1\left[1-2x^2+x^4-(x^2-2x+1)\right]dx=$$

$$=\pi\int_0^1(\cancel{1}-2x^2+x^4-x^2+2x-\cancel{1})\,dx$$

$$=\pi\int_0^1(x^4-3x^2+2x)\,dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}-3\cdot\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}\right]_0^1=$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}x^5-x^3+x^2\right]_0^1=\pi\left(\frac{1}{5}-1+1-0\right)=\pi\cdot\frac{1}{5}=\boxed{\frac{1}{5}\pi}$$

Příklad 5: Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného grafy funkcí a) $y=\frac{1}{2}x^2+1$, $y=-x+5$, $y=0$, $x=0$, $x=4$ kolem osy x.



Nejdříve meze – určíme průsečík paraboly $y=\frac{1}{2}x^2+1$ a přímky $y=-x+5$

$y=y$

$\frac{1}{2}x^2+1=-x+5 \quad /\cdot 2$

$x^2+2=-2x+10$

$x^2+2x-8=0$

$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}$ = $x_1=-4$ (nevyhovuje), $x_2=2$

Tak určíme $V=V_1+V_2$.

$$V_1=\pi\int_0^2\left[\frac{1}{2}x^2+1\right]^2dx=\pi\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^4+x^2+1\right)dx=\pi\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x\right]_0^2=$$

$$=\pi\left[\frac{x^5}{20}+\frac{x^3}{3}+x\right]_0^2=\pi\left(\frac{32}{20}+\frac{8}{3}+2\right)=\boxed{\frac{94}{15}\pi}$$

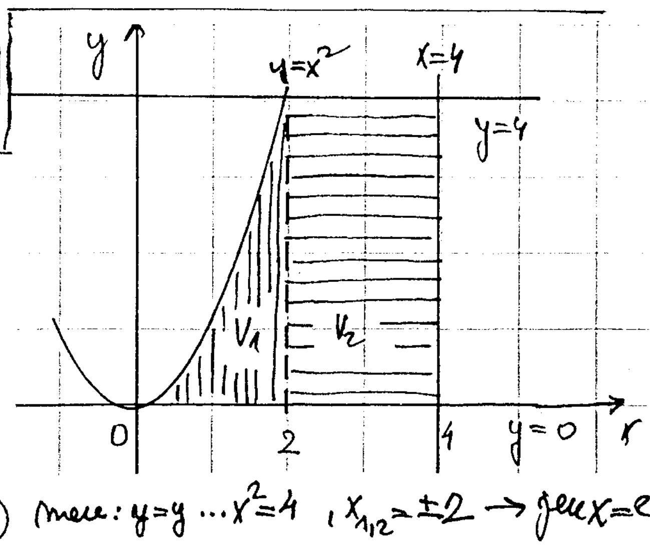
$$V_2=\pi\int_2^4(-x+5)^2dx=\pi\int_2^4(x^2-10x+25)dx=\pi\left[\frac{x^3}{3}-\frac{10x^2}{2}+25x\right]_2^4=$$

$$=\pi\left[\frac{x^3}{3}-5x^2+25x\right]_2^4=\pi\left[\frac{64}{3}-80+100-\left(\frac{8}{3}-20+50\right)\right]=\pi\left(\frac{64}{3}+20-\frac{8}{3}-30\right)=$$

$$=\boxed{\frac{26}{3}\pi}$$

$$V=V_1+V_2=\frac{94}{15}\pi+\frac{26}{3}\pi=\boxed{\frac{224}{15}\pi}$$

b) $y=x^2$, $y=4$, $x=4$ kolem osy x



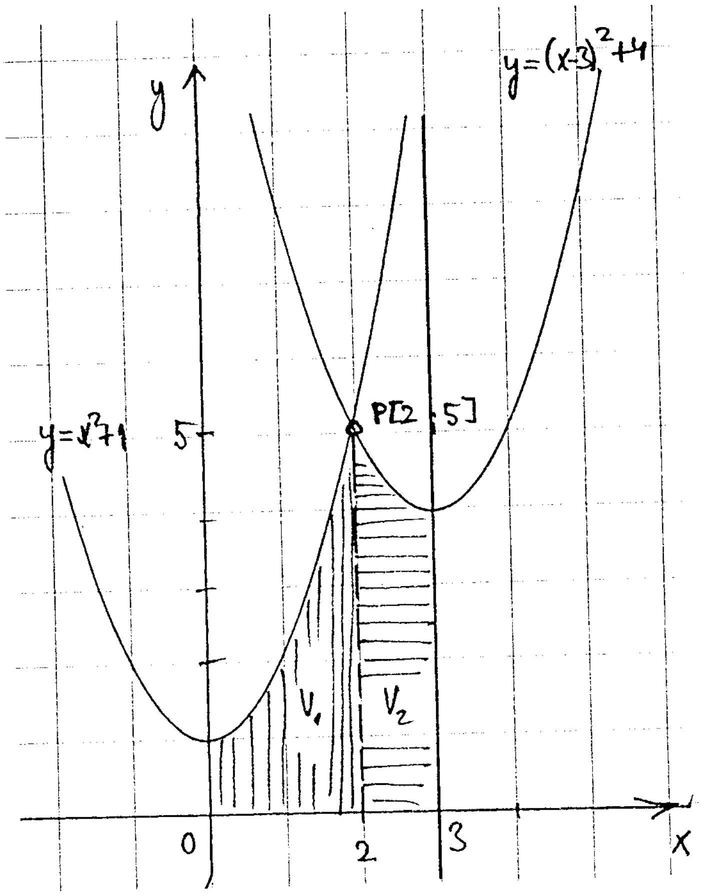
$$V=\pi\int_0^2(x^2)^2dx+\pi\int_2^4(4^2)dx=$$

$$=\pi\int_0^2x^4dx+\pi\int_2^4 16\,dx=$$

meze: $y=y$ … $x^2=4$, $x_{1,2}=\pm2$ → jen $x=2$

$= \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 + \pi\left[16x\right]_2^4 = \pi\left(\frac{32}{5} - 0\right) + \pi(16.4 - 16.2) = \frac{32}{5}\pi + 32\pi = \boxed{\frac{192}{5}\pi}$

c) $y = x^2+1$, $y = (x-3)^2+4$, $y=0$, $x=0$, $x=3$, kolem osy x.



Meze: $y=y$

$x^2+1 = (x-3)^2+4$

$x^2+1 = x^2-6x+9+4 \quad (x^2-6x+13)$

$6x = 12$

$x = \cancel{1}2 \ldots y = 2^2+1=5$

$P[2;5]$

$V = V_1+V_2$

$V_1 = \pi\int_0^2 (x^2+1)^2\,dx + \pi\int_2^3 (x^2-6x+13)^2\,dx$ ⊕

VZOREC: $(A+B+C)^2 =$
$= A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC$

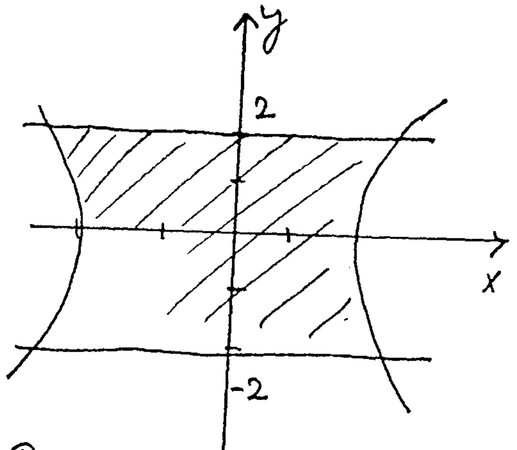
⊕ $\pi\int_0^2 (x^4+2x^2+1)\,dx + \pi\int_2^3 (x^4+36x^2+169x-12x^3+26x^2-156x)\,dx =$

$= \pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right]_0^2 + \pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{62x^3}{3}+169x-3x^4-78x^2\right]_2^3 =$

$= \pi\left(\frac{32}{5}+\frac{16}{3}+4\right) + \pi\left(\frac{243}{5}+558+507-243-702 -\right.$

$\left.-\left(\frac{32}{5}+\frac{496}{3}+338-48-312\right)\right] = \frac{206}{15}\pi + \frac{283}{15}\pi = \boxed{\frac{163}{5}\pi}$

Příklad 6 (6.25/178) - ně. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami: $x^2-y^2=4$, $y=-2$, $y=2$ kolem osy $\underline{y}$.



$x^2-y^2=4$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$

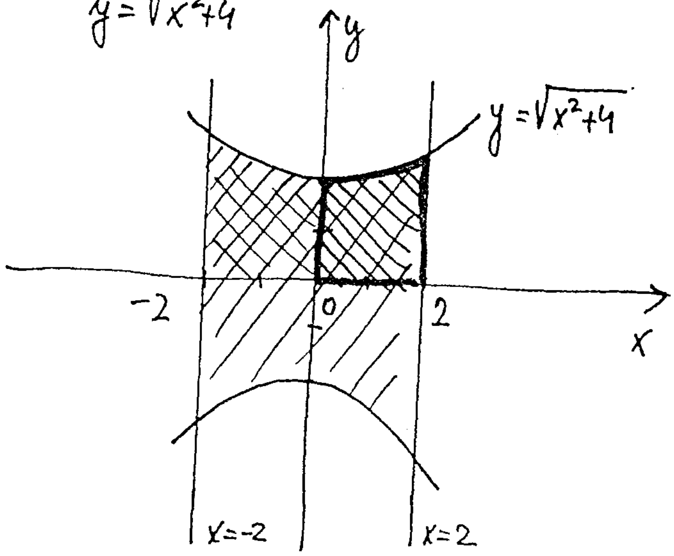
Abychom mohli využít své dosavadní znalosti, zaměníme proměnné a budeme rotovat kolem osy x.

Po záměně proměnných dostáváme:

$y^2-x^2=4$, $x=-2$, $x=2$

$y^2=x^2+4$

$y=\sqrt{x^2+4}$



$$V=2\cdot\pi\int_0^2\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2 dx=$$

$$=2\pi\int_0^2 x^2+4=2\pi\left[\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2$$

$$=2\pi\left(\frac{8}{3}+8\right)=2\pi\cdot\frac{32}{3}=\boxed{\frac{64}{3}\pi}\ j^3$$

Těleso má objem $\frac{64}{3}\pi\ j^3$ (jednotek krychlových).