Vzorce pro derivace element. funkcí aj.

Funkce	Její derivace	Podmínky
k	0	k je konstanta
x	1	$x \in (-\infty, +\infty)$
x^n	nx^{n-1}	$x \in (-\infty, +\infty)$, $n \in N \wedge n > 1$
x^{-n}	$-nx^{-n-1}$	$x \neq 0$, $n \in N$
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$x > 0$, $\alpha \in R$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in (-\infty, +\infty)$, $a > 0$
e^x	e^x	$x \in (-\infty, +\infty)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x > 0$, $a > 0 \wedge a \neq 1$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$
$\mathrm{cotg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$

$(u+v)' = u' + v'$

$(u-v)' = u' - v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Derivace $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$y = \frac{1}{a} e^{ax}$, $y' = e^{ax}$, např. $y = \frac{1}{2} e^{2x}$, $y' = e^{2x}$

$y = \sin bx$ $y' = b . \sin' bx$, např. $y = \sin 3x$, $y' = 3 . \sin' 3x$

Derivace složené funkce

$f'[g(x_0)] = f'(g\, x_0) \cdot g'(x_0)$, například:

$y = (2x-4)^7$, sub. $2x - 4 = z$

$y = z^7$, $y' = z^7 . z = 7(2x-4)^6 . (2x-4)' =$

$= 7(2x-4)^6 . 2 = 14 . (2x-4)^6$

Rovnice tečny v bodě $T[x_0, y_0]$: $y - y_0 = f'(x_0) . (x - x_0)$

Příklady na derivace funkcí

$y = \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 7x - 3 \ldots y' = 3\cdot\frac{1}{2}x^2 - 2.5x^1 + 7 = \boxed{\frac{3}{2}x^2 - 10x + 7}$ } jde teď o derivaci +, −

$y = 7x^5 - 2x^3 + 2\pi \ldots \underline{y' = 35x^4 - 6x^2}$

$y = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y = x^{\frac{2}{3}} \ldots y' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}} =$

$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \boxed{\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3x}}$

$y = \frac{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x^2\cdot x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^2\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{11}{6}}$

$y' = \frac{11}{6}\cdot x^{\frac{11}{6}-1} = \frac{11}{6}\cdot x^{\frac{5}{6}} = \boxed{\frac{11}{6}\cdot\sqrt[6]{x^5}}$

$y = \frac{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}{x^2} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt[2]{x^3}}}{x^2} = \frac{\sqrt[6]{x^3}}{x^2} = \frac{x^{\frac{3}{6}}}{x^2} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} = x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-2} = x^{-\frac{3}{2}}$

$y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2\sqrt{x^5}} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -\frac{3\sqrt{x}}{2x^2\cdot x} =$

$= \boxed{-\frac{3\sqrt{x}}{2x^3}}$

Derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu

$y = \frac{x^2}{x+1}$, y' pro každé $R - \{-1\}$ … derivuji jako podíl

$y' = \frac{(x^2)'\cdot(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1) - x^2\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} =$

$= \boxed{\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}}$

$y = 3x - 2\ln x$ … derivuji jako rozdíl

$y' = (3x)' - (2\ln x)' = 3 - 2\cdot\frac{1}{x} = 3 - \frac{2}{x} = \boxed{\frac{3x-2}{x}}$

$y = 5\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{x^3} + 2 = 5\cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{4}} + 2 \ldots y' = (5x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{4}} + 2)'$ jako +, −

$$y' = \left(5x^{\frac{1}{2}}\right)' - \left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{4}}\right)' + (2)' = \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{8}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x}} =$$

$$= \frac{5\sqrt{x}}{2x} - \frac{3\sqrt[4]{x^3}}{8x} = \boxed{\frac{20\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x^3}}{8x}}$$

$y = 2x\cdot\sqrt{1-x^2} = 2x\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ derivuj jako součin

$$y' = \left[2x\cdot\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = (2x)'\cdot\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2x\left[\underbrace{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{složená f.}}\right]' =$$

$$= 2\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2x\cdot\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(1-x^2\right)' = 2\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + x\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x) =$$

$$= 2\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} - 2x^2\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 2\cdot\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{2\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2} - 2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot\left(1-x^2\right) - 2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2-2x^2-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \boxed{\frac{2\cdot\left(1-2x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}}$$ Bylo by možné ještě usměrnit, ale není to nutné.

$$y = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x^1\cdot x^{-\frac{1}{2}} + 1 + 1\cdot x^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + 1 + x^{-\frac{1}{2}}$$

$y' = \left(x^{\frac{1}{2}} + 1 + x^{-\frac{1}{2}}\right)'$ derivuj jako součet $= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + 0 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} =$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{x\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2} =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{x}(x-1)}{2x^2}}$$

$y = \dfrac{x^2}{(2-x)^2}$ derivuj jako podíl

$$y' = \frac{(x^2)' \cdot (2-x)^2 - x^2 \cdot [(2-x)^2]'}{(2-x)^4} = \frac{2x(2-x)^2 - x^2 2(2-x)^1 \cdot (-1)}{(2-x)^4} =$$

složená

$$\frac{2x(2-x)^2 + 2x^2(2-x)}{(2-x)^4} = \frac{(2-x)\cdot[2x(2-x) + 2x^2]}{(2-x)^4} = \frac{2x(2-x)+2x^2}{(2-x)^3} =$$

$$= \frac{4x - 2x^2 + 2x^2}{(2-x)^3} = \boxed{\frac{4x}{(2-x)^3}}$$

$y = 7x^4 - \sqrt{2}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + x$ ... jako součet (rozdíl) .. $\boxed{y' = 28x^3 - 3\sqrt{2}x^2 - \frac{8}{3}x + 1}$

$y = (x^3 - x^2) \cdot \cos x$ jako součin

$y' = (x^3-x^2)' \cdot \cos x + (x^3-x^2) \cdot (\cos x)' = \underline{(3x^2-2x) \cdot \cos x - (x^3-x^2) \cdot \sin x}$

$y = \frac{3x-5}{x^2+1}$ ... $y' = \frac{(3x-5)' \cdot (x^2+1) - (3x-5) \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{3(x^2+1) - (3x-5) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$

$$= \frac{3x^2 + 3 - 6x^2 + 10x}{(x^2+1)^2} = \boxed{\frac{-3x^2+10x+3}{(x^2+1)^2}}$$

$y = \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{4}{x^3} = 2 \cdot x^{-1} - 5 \cdot x^{-2} - 4 \cdot x^{-3}$ ... $y' = -2x^{-2} + 10x^{-3} + 12x^{-4} =$

$$= \boxed{-\frac{2}{x^2} + \frac{10}{x^3} + \frac{12}{x^4}}$$

$y = \frac{1+\sin x}{1-\cos x}$ ... $y' = \frac{(1+\sin x)' \cdot (1-\cos x) - (1+\sin x) \cdot (1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2} =$

$$= \frac{(0+\cos x) \cdot (1-\cos x) - (1+\sin x) \cdot (0+\sin x)}{(1-\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x - \cos^2 x - (\sin x + \sin^2 x)}{(1-\cos x)^2} = \frac{\cos x - \cos^2 x - \sin x - \sin^2 x}{(1-\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x - \sin x - (\cos^2 x + \sin^2 x)}{(1-\cos x)^2} = \boxed{\frac{\cos x - \sin x - 1}{(1-\cos x)^2}}$$

$$y=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\ \dots\ y'=\frac{(\sin x)'\cdot(\sin x+\cos x)-\sin x\cdot(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{\cos x(\sin x+\cos x)-\sin x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{\sin x\cos x}+\cos^2 x-\cancel{\sin x\cos x}+\sin^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{1}{\underbrace{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x}_{1}}=$$

$$\boxed{\frac{1}{1+\sin 2x}}$$

$$y=\frac{2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=\frac{2\cdot x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{2}}}\ \dots\ y'=\frac{(2x^{\frac{1}{2}})'\cdot(1-x^{\frac{1}{2}})-2x^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x^{\frac{1}{2}})'}{(1-\sqrt{x})^2}=$$

$$\frac{x^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-x^{\frac{1}{2}})-2x^{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})}{(1-\sqrt{x})^2}=\frac{x^{-\frac{1}{2}}-x^0+1\cdot x^0}{(1-\sqrt{x})^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{(1-\sqrt{x})^2}{1}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1-\sqrt{x})^2}}$$

$$y=\frac{\cos x-1}{\sin x},\quad y'=\frac{(\cos x-1)'\cdot\sin x-(\cos x-1)\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{-\sin x\cdot\sin x-(\cos x-1)\cdot\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x+\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)+\cos x}{1-\cos^2 x}=\frac{-1+\cos x}{1-\cos^2 x}=\frac{-(\cancel{1-\cos x})}{(\cancel{1-\cos x})\cdot(1+\cos x)}=\boxed{\frac{-1}{1+\cos x}}$$

$$y=\frac{2x-\sqrt[3]{x}+3}{\sqrt{x}}=\frac{2x}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}}=2x\cdot x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+3\cdot x^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=2x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{6}}+3x^{-\frac{1}{2}}\ \dots\ y'=(2x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{6}}+3x^{-\frac{1}{2}})'=$$

$$=x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{6\sqrt[6]{x^7}}-\frac{3}{2\sqrt{x^3}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{6x\cdot\sqrt[6]{x}}-\frac{3}{2x\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{1}{6x\sqrt[6]{x}}\cdot\frac{\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[6]{x^5}}-\frac{3}{2x\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{6\sqrt{x^5}}{6x^2}-\frac{3\sqrt{x}}{2x^2}=\boxed{\frac{6x\sqrt{x}+\sqrt[6]{x^5}-9\sqrt{x}}{6x^2}}$$

Derivace složené funkce

$$\boxed{f'(g(x_0)) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)}$$

$y = \sin^6 x = (\sin x)^6 \ldots\ y' = 6\cdot(\sin x)^5\cdot\cos x = \underline{6\cdot\sin^5 x\cdot\cos x}$

$y = \mathrm{tg}^3 x = (\mathrm{tg}\, x)^3 \ldots\ \underline{y' = 3\,\mathrm{tg}^2 x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}$

$y = (\underbrace{x^2-3x+1}_{z})^3 \ldots\ y' = (z^3)\cdot z'$

$\underline{y' = 3\,(x^2-3x+1)^2\cdot(2x-3)}$

$y = z^3$

$y = (x^5+2x+1)^7 \ldots\ \underline{y' = 7\cdot(x^5+2x+1)^6\cdot(5x^4+2)}$

$f(x) = (1-5x)^4 \ldots\ f'(x) = 4(1-5x)^3\cdot(-5) = \underline{-20\,(1-5x)^3}$

$f(x) = (1-x^2)^3 \ldots\ f'(x) = 3\,(1-x^2)^2\cdot(-2x) = \underline{-6x\,(1-x^2)^2}$

$f(x) = (2x+3)^{-3} \ldots\ f'(x) = -3\,(2x+3)^{-3-1}\cdot 2 = -6\,(2x+3)^{-4} = \boxed{-\dfrac{6}{(2x+3)^4}}$

$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}} \ldots\ f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{1}{3}-1}\cdot 1 = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\,\dfrac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} =$

$= \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}\cdot\sqrt[3]{x+1}} = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1} = \boxed{\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{3x+3}}$

$f(x) = \sqrt[3]{x^2+1} \ldots f(x) = (x^2+1)^{\frac{1}{3}} \ldots\ f'(x) = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{1}{3}-1}\cdot 2x = \dfrac{2x}{3}\cdot\dfrac{1}{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}} =$

$= \dfrac{2x}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}} = \dfrac{2x}{3}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x^2+1} = \boxed{\dfrac{2x\sqrt[3]{x^2+1}}{3x^2+3}}$

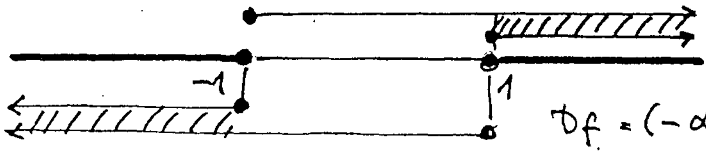
$f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$, r je konstanta, $f(x) = (r^2-x^2)^{\frac{1}{2}} \ldots\ f'(x) = \frac{1}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x) =$

$= -\dfrac{2x}{2}\,(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x\,\dfrac{1}{(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \boxed{-\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}}$ lze ještě usměrnit, ale není to nutné.

Vypočítejte derivaci funkce $y=\sqrt[3]{x^2-1}$ v libovolném bodě intervalu, který je definičním oborem této funkce.

$x^2-1 \geqq 0$ $\quad [(x+1\geqq 0) \wedge (x-1\geqq 0)] \vee [(x+1)\leqq 0 \wedge (x+1)\leqq 0]$

$(x+1)\cdot(x-1)\geqq 0$ $\quad (x\geqq -1 \wedge x\geqq 1) \vee (x\leqq -1 \wedge x\leqq 1)$



$D_f = (-\infty;-1\rangle \cup \langle 1;+\infty)$

$y=(x^2-1)^{\frac{1}{3}} \dots y' = \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{1}{3}-1}\cdot 2x = \frac{2x}{3}\cdot(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2x}{3}\cdot\frac{1}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} =$

$= \frac{2x}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \boxed{\frac{2x\sqrt[3]{x^2-1}}{3(x^2-1)}}$

$y=\sin\underbrace{(x^2-1)}_{z} \dots y'=(\sin z)'\cdot z' = \cos z\cdot(x^2-1)' = \cos z\cdot 2x = \cos(x^2-1)\cdot 2x$

$= \underline{2x\cdot\cos(x^2-1)}$

$y=\sin^3 x \dots y=\underbrace{(\sin x)}_{z}^3 \dots y'=(z^3)'\cdot z' = 3z^2\cdot(\sin x)' = \underline{3\cdot\sin^2 x\cdot\cos x}$

$y=\cos\underbrace{(2x-5)}_{z} \qquad y'=(\cos z)'\cdot z' = -\sin z\cdot(2x-5)' = -\sin(2x-5)\cdot 2 =$

$y=\cos z \qquad = \underline{-2\sin(2x-5)}$

- Z naší učebnice 56/94, kde to není dobře vysvětleno, jde o „tříkrát" složenou funkci.

$y=\sin^2(x^2-3x) \dots y=\sin\underbrace{(x^2-3x)}_{z}\cdot\sin\underbrace{(x^2-3x)}_{z} \dots y=\sin^2 z \quad (y=(\sin z)^2)$

$\dots y=\underbrace{\sin z}_{u}\cdot\underbrace{\sin z}_{u} \dots y=u^2 \quad y'=(u^2)'\cdot u'\cdot z' \dots y'=2u\cdot u'\cdot z'$

$y'=2\cdot\sin z\cdot\cos z\cdot(2x-3) = 2\cdot\sin(x^2-3x)\cdot\cos(x^2-3x)\cdot(2x-3) =$

$\boxed{\text{VZOREC: } 2\sin x\cos = \sin 2x} \quad = \boxed{\sin 2(x^2-3x)\cdot(2x-3)}$

$y = \cot g^2 x \quad \dots \; y = \underbrace{\cot g x}_{z} \cdot \underbrace{\cot g x}_{z} \quad \dots \; y = z^2 \quad \dots \; y = (z^2)' \cdot z'$

$y = 2z \cdot z' = 2 \cdot \cot g x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \boxed{-\frac{2 \cot g x}{\sin^2 x}}$

$y = \sin^2 3x$

$y = \sin \underbrace{3x}_{z} \cdot \sin \underbrace{3x}_{z}$

$y = \underbrace{\sin z}_{u} \cdot \underbrace{\sin z}_{u}$

$y = u^2$

$y' = (u^2)' \cdot u' \cdot z'$

$y' = 2u \cdot u' \cdot z' = 2 \cdot \sin z \cdot (\sin z)' \cdot (3x)' =$

$= \underbrace{2 \cdot \sin z \cdot \cos z}_{} \cdot 3 = \sin 2z \cdot 3 =$

VZOREC (na předchozí stránce dole)

$= \sin 2 \cdot (3x) \cdot 3 = \sin 6x \cdot 3 = \underline{3 \cdot \sin 6x}$

$y = \sin^2 \frac{1}{3} x$

$y = \left(\sin \frac{1}{3} x\right)^2$

$y = \underbrace{\sin \frac{1}{3} x}_{u} \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{3} x}_{u}$

$z = \frac{1}{3} x$

$y = u^2$

$y' = (u^2)' \cdot u' \cdot z'$

$y' = 2u \cdot \cos \frac{1}{3} x \cdot \frac{1}{3} = \underbrace{2 \sin \frac{1}{3} x \cdot \cos \frac{1}{3} x}_{\text{VZOREC}} \cdot \frac{1}{3} =$

$= \sin 2 \cdot \frac{1}{3} x \cdot \frac{1}{3}$

$= \boxed{\frac{1}{3} \cdot \sin \frac{2}{3} x}$

$y = \cos^2 x$

$y = z^2 \quad z = \cos x$

$y' = (z^2) \cdot z' = 2z \cdot z' = 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x) = \underbrace{-2 \sin x \cos x}_{\text{VZOREC}} =$

$= \boxed{-\sin 2x}$

$y = \sin^2 x + \cos^2 x \quad \dots \; y = 1 \qquad \boxed{y' = 0}$

$y = \sin^3 x^2$

$y = (\sin x^2)^3 \; ; \; z = x^2$

$y = (\sin z)^3 \, , \; \sin z = u$

$y = u^3$

$y' = (u^3)' \cdot u' \cdot z' = 3u^2 \cdot u' \cdot z' =$

$= 3 \sin^2 z \cdot \cos z \cdot 2x = 3 \sin^2 x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x =$

$= \boxed{6x \cdot \sin^2 x^2 \cdot \cos x^2}$

$y = \sin^2 3x$

$y = \sin^2 3x$

$z = 3x$

$y = \sin^2 z$

$u = \sin z$

$y = u^2$

$y' = (u^2) \cdot u' \cdot z'$

$y = 2u \cdot (\sin z)' \cdot (3x)' =$

$$2 . \sin z . \cos z . 3 = 2 \underbrace{\sin 3x . \cos 3x}_{\text{UZOREC}} . 3 = \sin 2.3x . 3 = \boxed{3 . \sin 6x}$$

$$y = \ln (3x^2 + \sqrt{x}) \qquad \text{UZOREC: } y = \ln x ,\ y' = \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{1}{3x^2+\sqrt{3}} . (6x + \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}) = \frac{1}{3x^2+\sqrt{3}} . (6x + \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}) =$$

$$= \frac{1}{3x^2+\sqrt{3}} . \left(6x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$y = \ln^5 (x^5 - 1)$$

$$y = [\ln (\underbrace{x^5-1}_{z})]^5$$

$$y = (\underbrace{\ln z}_{v})^5$$

$$y = v^5$$

$$y' = (v^5)' . v' . z'$$

$$y' = 5v^4 . v' . z'$$

$$y' = 5 (\ln z)^4 . \frac{1}{z} . 5x^4$$

$$y' = 5 . \ln^4 z . \frac{1}{z} . 5x^4$$

$$\boxed{y' = 5 \ln^4 (x^5-1) . \frac{1}{x^5-1} . 5x^4}$$

$$y = \cos^4 (x^3 + 3)$$

$$y = [\cos (\underbrace{x^3+3}_{z})]^4$$

$$y = \underbrace{\cos z}_{u}{}^4$$

$$y = u^4$$

$$y' = (u^4)' . u' . z'$$

$$y' = 4u^3 . u' . z'$$

$$y' = 4 . \cos^3 z . (-\sin z) . 3x^2$$

$$y' = 4 \cos^3 (x^3+3) . [-\sin (x^3+3)] . 3x^2$$

$$y' = -12x^2 . \cos^3 (x+3) . \sin (x^3+3) .$$

$$y = e^{\underbrace{3x^2-x+5}_{z}}$$

$$y = e^z$$

$$\ldots y' = (e^z) . z'$$

$$y' = e^{3x^2-x+5} . (6x-1)$$

$y = x^3 \cdot e^{x-2}$; $x-2 = z$

$y = x^3 \cdot e^z$ derivujeme jako součin $(uv)' = u'v + uv'$

$y' = (x^3 \cdot e^z)' = 3x^2 \cdot e^z + x^3 \cdot (e^z)' = \underbrace{3x^2 \cdot e^{x-2} + x^3 \cdot e^{x-2} \cdot 1}_{\text{vytkneme } x^2 \cdot e^{x-2}} =$

$\underline{x^2 \cdot e^{x-2}(3+x)}$

$y = x^3 \cdot \sqrt{1+x^3}$

$y = x^3 \cdot (1+x^3)^{\frac{1}{2}}$

jako součin

$y' = (\underset{u}{x^3} \cdot \underset{v}{(1+x^3)^{\frac{1}{2}}})'$

$y' = 3x^2 \cdot (1+x^3)^{\frac{1}{2}} + x^3 \cdot \frac{1}{2}(1+x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2$

$\boxed{y' = 3x^2 \cdot \sqrt{1+x^3} + \frac{3}{2}x^5 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}}$

$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ derivujeme jako podíl $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$y = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdots y' = \frac{1 \cdot (1-x^2)^{\frac{1}{2}} - x \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)}{\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^2} =$

$= \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(1-x^2)} = \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-x^2)} - \frac{x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(1-x^2)} =$

$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x^2)^{-1} - x^2 \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x^2)^{-1} =$

$= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2 \cdot (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}}$

$y = \frac{1}{x^2} - 2x^{\sqrt{2}}$ jako rozdíl $(u-v)' = u' - v'$

$y = x^{-2} - 2x^{\sqrt{2}} \ldots y' = -2x^{-3} - 2\sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}-1} = \boxed{-\frac{2}{x^3} - 2\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}}$

$y = \sqrt{x\sqrt{x \cdot \sqrt{x}}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{7}{8}}$

$y' = \frac{7}{8}x^{\frac{7}{8}-1} = \frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}} = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{x}} = \boxed{\frac{7}{8 \cdot \sqrt[8]{x}}}$

$$y = -2e^{\underbrace{\sin^2 x + \cos 2e^{x^2}}_{z}}$$

$$y = -2e^{z},\ y' = (-2e^{z})' \cdot z' = -2e^{\sin^2 x \cos 2e^{x^2}} \cdot (\underline{\sin^2 x} + \underline{\cos 2e^{x^2}})'$$

derivuji jako součet dvou složených f.

$$= \boxed{-2e^{\sin^2 x \cos 2e^{x^2}} \cdot \underbrace{2 \cdot \sin x \cos x}_{\sin 2x} - \sin 2e^{x^2} \cdot 2x}$$

$$y = \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v} = u'v + uv'$$

$$y' = (\ln x)' \cdot \cos x + \ln x \cdot (\cos x)' = \frac{1}{x} \cdot \cos x + \ln x\,(-\sin x) =$$

$$= \boxed{\frac{\cos x}{x} - \ln x \cdot \sin x}$$

$$y = \frac{\sqrt{x \sqrt[3]{x^2}}}{x^5} = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x^3 \cdot x^2}}}{x^5} = \frac{\sqrt[6]{x^5}}{x^5} = x^{\frac{5}{6}} \cdot x^{-5} = x^{-\frac{25}{6}};$$

$$y' = -\frac{25}{6} \cdot x^{-\frac{25}{6}-1} = -\frac{25}{6} \cdot x^{-\frac{31}{6}} = -\frac{25}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{x^{31}}} = -\frac{25}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{x^{30} \cdot x^1}} =$$

$$= -\frac{25}{6} \cdot \frac{1}{x^5 \sqrt[6]{x}} = \boxed{-\frac{25}{6x^5 \sqrt[6]{x}}}$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 1} = (x^2-1)^{\frac{1}{3}} \ldots y' = \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (x^2-1) = \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x =$$

$$\frac{1}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} \cdot 2x = \frac{2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \boxed{\frac{2x \cdot \sqrt[3]{x^2-1}}{3(x^2-1)}}$$

$$y = \cos^4 (6x - 5x^3)^5 = [\cos (6x-5x^3)^5]^4$$

Subst.: $\cos (6x-5x^3)^5 = u$

$(6x-5x^3)^5 = z$

$6x - 5x^3 = v$

$$y' = (u^4)' \cdot u' \cdot z' v'$$

$$y' = 4u^3 \cdot (\cos z)' \cdot [(6x-5x^3)^5]' \cdot (6x-5x^3)' =$$

$$y' = 4 \cdot \cos^3 (6x-5x^3)^5 \cdot [-\sin (6x-5x^3)^5] \cdot 5(6x-5x^3)^4 \cdot (6-15x^2)$$

$y = \sin 2x$

<u>1. způsob:</u> $2x = z$

$y' = (\sin z)' \cdot z'$

$y' = \cos z \cdot (2x)'$

$y' = \cos 2x \cdot 2$

$\boxed{y' = 2 \cdot \cos 2x}$

<u>2. způsob</u> pomocí vzorce (viz tabulka)

$y = \sin bx, \; y' = b \cdot \sin' bx$

$\boxed{y' = 2 \cdot \cos 2x}$

$y = \sin 3x \; \ldots \; y' = \boxed{3 \cdot \cos 3x}$

$y = x \cdot \underbrace{\sin x}_{z} + \underbrace{\cos x}_{v}$; $y = x \cdot z + v$ derivujeme jako součet

$y' = \underbrace{(x \cdot z)'}_{\text{jako součin}} + v' = x'z + xz' + v' = 1 \cdot \cancel{\sin x} + x \cdot \cos x - \cancel{\sin x} = \boxed{x \cdot \cos x}$

$y = \sin^4 x = (\underbrace{\sin x}_{z})^4 \; \ldots \; y' = (z^4)' \cdot z' = 4 \cdot z^3 \cdot (\sin x)' = \boxed{4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x}$

$y = \sin \underbrace{3x^2}_{z} = \sin z$; $y' = (\sin z)' \cdot z' = \cos z \cdot 6x = \boxed{6x \cdot \cos 3x^2}$

$y = \dfrac{\sin x}{x} \; \ldots \; y' = \dfrac{(\sin x)' \cdot x - \sin (x)'}{x^2} = \dfrac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} =$

$\dfrac{x \cdot \cos x}{x^2} - \dfrac{\sin x}{x^2} = \boxed{\dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{\sin x}{x^2}}$

Výpočet hodnot derivace funkce v daných bodech

Vypočítejte hodnotu derivace funkce $y = x^2 - 2x + 1$ pro

a) $x_0 = -2$, b) $x_0 = 0$, c) $x_0 = 1$

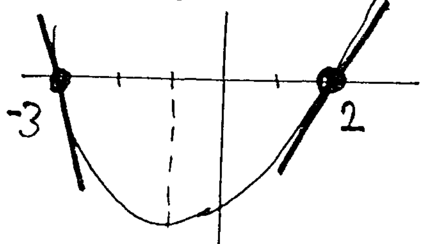
$y' = 2x - 2$

a) $y' = 2\cdot(-2) - 2 = -4 - 2 = \boxed{-6}$

b) $y' = 2\cdot 0 - 2 = \boxed{-2}$

c) $y' = 2\cdot 1 - 2 = \boxed{0}$

Vypočítejte hodnotu derivace funkce $y = x^2 + x - 6$ v průsečících jejího grafu s osou x.



$y' = 2x + 1$

$0 = x^2 + x - 6$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{matrix} -3 \\ 2 \end{matrix} \right.$

Pro $x_0 = -3$, $y' = 2\cdot(-3) + 1 = \boxed{-5}$

Pro $x_0 = 2$, $y' = 2\cdot 2 + 1 = \boxed{5}$

Tentýž postup pro funkci $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$ (derivuj jako podíl)

$$y' = \frac{(x^2-1)'\cdot(x+2) - (x^2-1)\cdot(x+2)'}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{2x\,(x+2) - (x^2-1)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2 + 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}$$

Průsečíky s osou x:

$\dfrac{x^2-1}{x+2} = 0$

$x^2 - 1 = 0$

$(x+1)\cdot(x-1) = 0$

$x_0 = 1$, $x_0 = -1$

Hodnota derivace v bodě

$x_0 = 1$

$y' = \dfrac{1^2 + 4\cdot 1 + 1}{(1+2)^2} = \dfrac{6}{9} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

$x_0 = -1$

$y' = \dfrac{(-1)^2 + 4\cdot(-1) + 1}{(-1+2)^2} = \dfrac{-2}{1} = \boxed{-2}$

Pro které hodnoty x je derivace funkce $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x$ rovna a) 0, b) $= -2$

$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$y' = x^2 + x - 2$

a) $x^2 + x - 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$$\boxed{x = 1 \ , \ x = -2}$$

b) $x^2 + x - 2 = -2$

$x^2 + x = 0$

$x(x+1) = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \ , \ x = -1$

$$\boxed{x = 0 \ , \ x = -1}$$

Rovnice tečny a normály ke křivce

$$t: \left\{ \boxed{\begin{aligned} y - f(x_0) &= f'(x_0)\cdot(x-x_0) \\ y - y_0 &= y'\cdot(x-x_0) \\ y - y_0 &= k_t\cdot(x-x_0) \end{aligned}} \right.$$

jsou rovnice tečny křivky v jejím bodě dotyku $T[x_0;y_0]$, kde $f'(0) = y' = k_t$ je směrnice této tečny.

Definice: Normála rovinné křivky je přímka, která je kolmá k tečně této křivky v bodě dotyku.

$n \perp t$, proto pro normálu směrnici $-\frac{1}{k}$.

$\boxed{n:\ y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)}$ je rovnice normály, $-\frac{1}{k} = k_n$

Příklad 1: Napište rovnici tečny a normály grafu následující funkce v jejím bodě dotyku $T[x_0;y_0]$.

a) $y = x^3,\ x_0 = -1$

Postup:

1) Určíme souřadnici y_0 bodu T:

$y_0 = (-1)^3 = -1$; $T[\underset{x_0}{-1};\underset{y_0}{-1}]$

2) Určíme směrnici tečny t jako derivaci funkce $y = x^3$

$y' = 3x_0^2 = 3.(-1)^2 = 3$; $k = 3$

3) Vypočítáme rovnici tečny t:

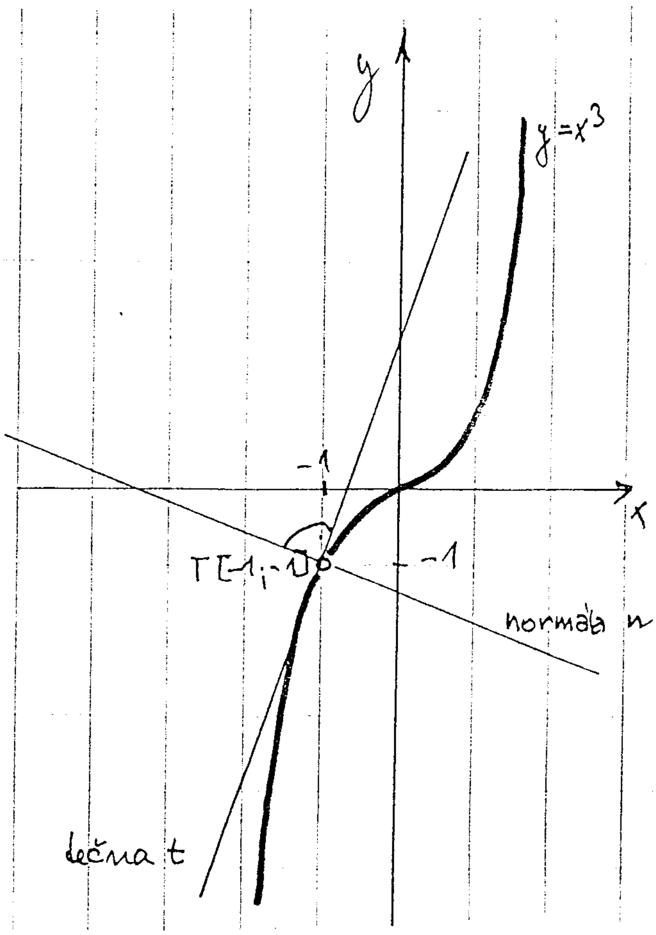
$y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$

$y - (-1)^3 = 3.(-1)^3.[x - (-1)]$

$y + 1 = 3(x+1)$

$y + 1 = 3x + 3$

$\boxed{t: y = 3x + 2}$ $\boxed{3x - y + 2 = 0}$



$n:\ y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$

$y - (-1) = -\frac{1}{3}[x - (-1)]$

$y + 1 = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}x + y + \frac{4}{3} = 0 \quad |\cdot 3$

$\boxed{n: x + 3y + 4 = 0}$

b) $y = x^4,\ x_0 = 2$

$y_0 = 2^4 = 16$, $T[2;16]$, $y' = 4 \cdot x_0^3 = 4 \cdot 2^3 = 32$, $k = 32$; $-\frac{1}{k} = -\frac{1}{32}$

t... $y - y_0 = k(x - x_0)$

$y - 16 = 32(x-2)$

$y - 16 = 32x - 64$

$\boxed{t:\ 32x - y - 48 = 0}$

n.. $y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$

$y - 16 = -\frac{1}{32}(x-2)$

$y - 16 = -\frac{1}{32}x + \frac{1}{16}$

$\frac{1}{32}x + y - \frac{257}{16} = 0 \quad | \cdot 32$

$\boxed{n:\ x + 32y - 514 = 0}$

---

c) $y = tg\, x$ v bodě $T[\frac{\pi}{4}; y_0]$

$y_0 = tg\frac{\pi}{4} = 1 \ \dots\ T[\frac{\pi}{4}; 1]$

$y' = (tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{(\cos\frac{\pi}{4})^2} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{1}{\frac{2}{4}} = \frac{4}{2} = 2 \ \dots\ \boxed{k_t = 2}$

směrnice tečny t

t... $y - y_0 = k_t(x - x_0)$

$y - 1 = 2(x - \frac{\pi}{4})$

$y - 1 = 2x - \frac{\pi}{2}$

$\boxed{t:\ 2x - y + 1 - \frac{\pi}{2} = 0}$

n... $y - y_0 = k_n(x - x_0)$, kde $k_n = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{2}$

$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})$

$y - 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8}$ .. $\boxed{n:\ \frac{1}{2}x + y - 1 - \frac{\pi}{8} = 0}$

---

d) $y = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}$ v bodě $T[-\frac{1}{2}; y_0]$

$y_0 = \frac{2\cdot(-\frac{1}{2})^2 - 1}{-\frac{1}{2} + 1} = \frac{2\cdot\frac{1}{4} - 1}{\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1 \ \dots\ T[-\frac{1}{2}; -1]$

$y' = \frac{(2x^2-1)'\cdot(x+1) - (2x^2-1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{4x(x+1) - (2x^2-1)\cdot 1}{(x+1)^2} =$

$= \frac{4x^2 + 4x - 2x^2 + 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 4x + 1}{(x+1)^2} = \frac{2\cdot(-\frac{1}{2})^2 + 4\cdot(-\frac{1}{2}) + 1}{(-\frac{1}{2}+1)^2} =$

$= \frac{2\cdot\frac{1}{4} - 2 + 1}{\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = -2 \qquad \boxed{k_t = -2}$

t... $y-y_0=k(x-x_0)$ n... $y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0)$

$y+1=-2(x+\frac{1}{2})$ $y+1=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2})$

$y+1=-2x-1$ $y+1=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

$\boxed{t:\ 2x+y+2=0}$ $\frac{1}{2}x-y-\frac{3}{4}=0\ /\cdot 4$ ... $\boxed{n:\ 2x-4y-3=0}$

---

e) $y=x\cdot\ln x$ v bodě $T[e;y_0]$ ... $e \doteq 2{,}718281$ je základ přirozeného logaritmu

$y_0=e\cdot\underbrace{\ln e}_{1}$ jako $\log_{10}10=1$, neboť $10^1=10$, tak $\log_e e=1$, neboť $e^1=e$

$y_0=e$ ... $T[e;e]$

$y'=\underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\ln x}_{v}$ ... $u'v+uv'$

$y'=(x)'\ln x+x\cdot(\ln x)'=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$

pro $x=e$ je $\ln e+1=1+1=2$ $\boxed{k_t=2}$ $\boxed{k_n=-\frac{1}{2}}$

t... $y-y_0=k_t(x-x_0)$

$y-e=2\cdot(x-e)$

$y-e=2x-2e$

$\boxed{t:\ 2x-y-e=0}$

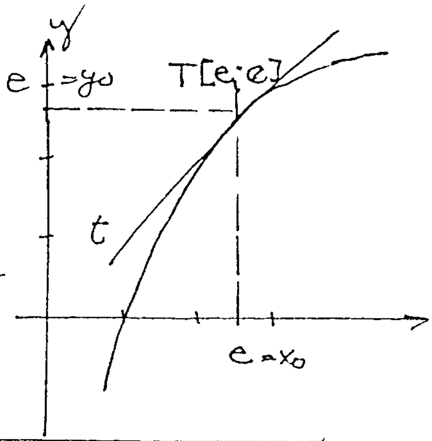
n... $y-y_0=k_n(x-x_0)$

$y-e=-\frac{1}{2}(x-e)$

$y-e=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}e$

$\frac{1}{2}x+y-\frac{3}{2}e=0\ /\cdot 2$

$\boxed{n:\ x+2y-3e=0}$



---

f) $y=\frac{x-1}{x+1}$ v bodě $x_0=3$

$y_0=\frac{3-1}{3+1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ... $T[3;\frac{1}{2}]$

$y'=\frac{(x-1)'\cdot(x+1)-(x-1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{1\cdot(x+1)-(x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=$

$=\frac{2}{(3+1)^2}=\frac{2}{4^2}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$ ... $\boxed{k_t=\frac{1}{8}}$ $\boxed{k_n=-8}$

t: $y-y_0=k_t(x-x_0)$

$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}(x-3)$

$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}x-\frac{3}{8}$

$\frac{1}{8}x-y+\frac{1}{8}=0\ /\cdot 8$

$\boxed{t:\ x-8y+1=0}$

n... $y-\frac{1}{2}=-8(x-3)$, po úpravě

$\boxed{n:\ 16x+2y-49=0}$

g) $y = \sin \underbrace{2x}_{z}$ v bodě $x_0 = \frac{\pi}{3}$

$y_0 = \sin 2\cdot\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ... $T[\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}]$

$y' = (\sin z)'\cdot z' = \cos z\cdot z' = \cos 2x\cdot 2 = 2\cdot\cos 2x$ ... $\boxed{k_t = 2\cos 2x_0}$

$= 2\cdot\cos 2\cdot\frac{\pi}{3} = 2\cos\frac{2}{3}\pi = 2\cdot(-\frac{1}{2}) = -1$

$\boxed{k_t = -1}$

$\boxed{k_n = 1}$

t... $y - y_0 = k.(x - x_0)$

$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -1.(x - \frac{\pi}{3})$

$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -x + \frac{\pi}{3}$

t: $\boxed{x + y - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} = 0}$

n... $y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$

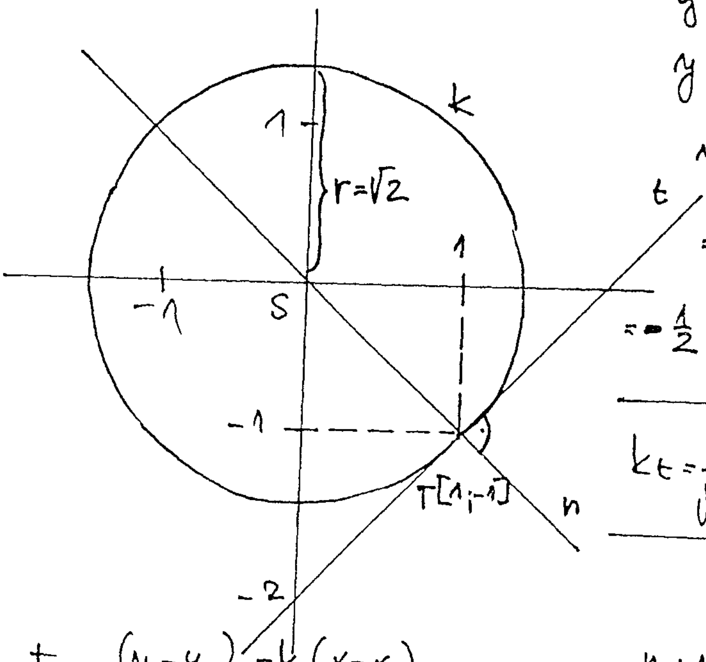
$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1(x - \frac{\pi}{2})$

$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = x - \frac{\pi}{3}$

n: $\boxed{x - y + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}}$

---

h) Kružnice $x^2+y^2=2$ v bodě $T[1;-1]$



$y^2 = 2 - x^2$

$y = \pm\sqrt{2-x^2} = (2-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{1}{2}(2-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(2-x^2)' =$

$= -\frac{1}{2}(2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x) =$

$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$

$k_t = \frac{1}{\sqrt{2-1^2}} = 1$ $\quad k_n = -1$

t... $(y - y_0) = k_t(x - x_0)$

$y + 1 = 1(x-1)$

$y + 1 = x - 1$

$\boxed{t:\ x - y - 2 = 0}$ nebo $\boxed{y = x - 2}$

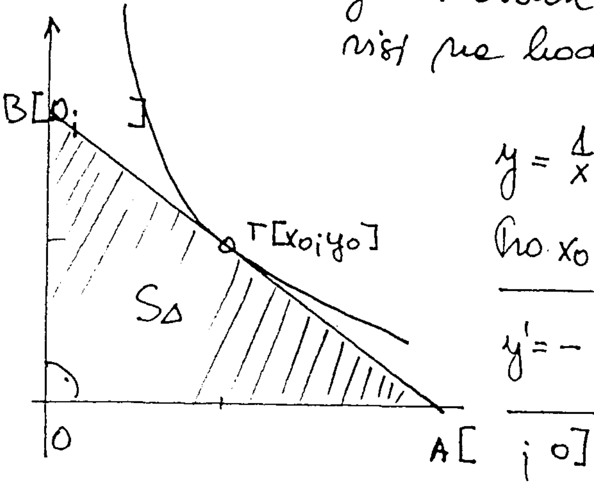
n: $y - y_0 = k_n(x - x_0)$

$y + 1 = -1(x-1)$

$y + 1 = -x + 1$

$\boxed{n:\ y = -x}$ nebo $\boxed{x + y = 0}$

Příklad 2 : Dokažte, že tečna hyperboly dané rovnicí $xy = 1$ tvoří s jejími asymptotami Δ, jehož obsah je konstantní, tj. obsah nezávisí na bodu dotyku tečny s grafem.



$y = \frac{1}{x}$

pro x_0 je $y = \frac{1}{x_0}$

$y' = -\frac{1}{x^2}$ | $k_t = -\frac{1}{x_0^2}$

$t \ldots\ y - y_0 = k_t(x - x_0)$

krátit

$y - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$, aby nastala tato rovnost $-\frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$,

A: $y = 0$ tedy $x - x_0 = x_0 \Rightarrow \boxed{x = 2x_0}$

B: $x = 0 \ \ldots\ y - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(0 - x_0)$

$y - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2} \cdot (-x_0)$

$y - \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0} \Rightarrow y = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0} = \frac{2}{x_0} \ \ldots\ \boxed{y = \frac{2}{x_0}}$

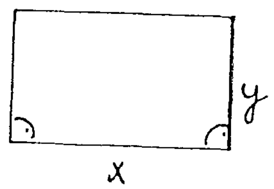
$$S_{\Delta OAB} = \frac{|OA| \cdot |OB|}{2} = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{2x_0 \cdot \frac{2}{x_0}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

S_Δ je 2, a nezávisí na bodu dotyku tečny s grafem

Užití derivací, tj. řešení reálných situací, při kterém využijeme extrémy funkcí

Příklad 3: Určete rozměry obdélníka, který při obvodu $o = 10\,cm$ má maximální obsah.

Řešení:



$o = 10$

$2x + 2y = 10$

$2y = 10 - 2x \quad |:2$

$\boxed{y = 5 - x}$ dosaď do

$S = xy$

$S = x \cdot (5 - x)$

$S = 5x - x^2$

$S' = 5 - 2x$

$S' = 0$

$5 - 2x = 0$

$2x = 5$

$\boxed{x = 2{,}5}$

$y = 5 - x$

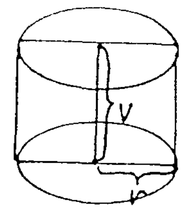
$y = 5 - 2{,}5$

$\boxed{y = 2{,}5}$

Protože $x = y$, je hledaný útvar čtverec se stranou dlouhou 2,5 cm.

Příklad 4: Na konzervu tvaru válce se má spotřebovat $5\,dm^2$ plechu (bez rezervy na švy). Určete její poloměr podstavy $\underline{r}$ a výšku v.

Řešení:



Jestliže je požadován maximální objem, musíme derivovat vzorec pro objem: $V = \pi r^2 v$.

$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v \quad (5\,dm^2 = 500\,cm^2)$

$500 = 2\pi r^2 + \underbrace{2\pi r v}_{\text{zde je proměnná } \underline{v}}$

$2\pi r v = 500 - 2\pi r^2 \quad |:2$

$\pi r v = 250 - \pi r^2 \quad \Big|\cdot \frac{1}{\pi r}$

$\boxed{v = \frac{250}{\pi r} - r}$ dosaď do

$V = \pi r^2 v$

$V = \pi r^2 \cdot \left(\frac{250}{\pi r} - r\right)$

$V = \frac{250\pi r^2}{\pi r} - \pi r^3$

$V = 250r - \pi r^3$ (proměnná je r)

$V' = 250 - 3\pi r^2$

$V' = 0$

$250 - 3\pi r^2 = 0$

$3\pi r^2 = 250$

$r^2 = \frac{250}{3\pi}$

$r = \sqrt{\frac{250}{3\pi}}$

$\boxed{r \doteq 5{,}15\,(cm)}$

$v \doteq \frac{250}{\pi \cdot 5{,}15} - 5{,}15$

$\boxed{v \doteq 10{,}3\,(cm)}$

Příklad 5: Vyjádřete číslo 100 jako součet dvou sčítanců tak, aby součet jejich druhých mocnin byl minimální.

Řešení:

$x \quad (100-x)$

$$S = x^2 + (100-x)^2$$

$$S = x^2 + 10\,000 - 200x + x^2$$

$$S = 2x^2 - 200x + 10\,000$$

$$S' = 4x - 200$$

$$S' = 0$$

$$4x - 200 = 0$$

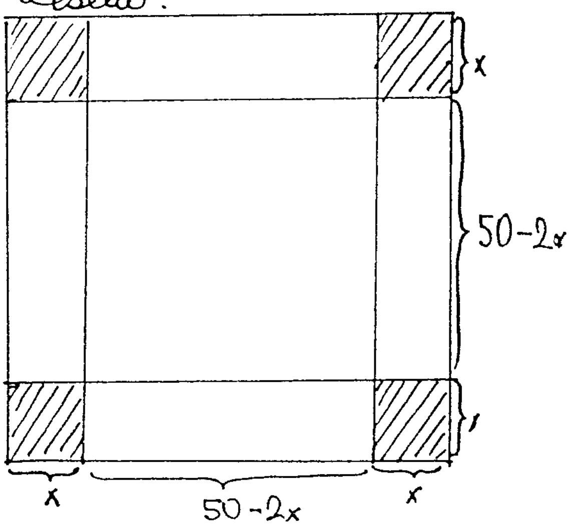
$$4x = 200$$

$$x = 50 \quad ; \quad 100 - x = 50$$

Hledaná čísla jsou 50, 50.

Příklad 6: Z lepenky tvaru čtverce se stranou délky 50 cm je třeba v rozích vyříznout takové stejně velké čtverce, aby bylo možné ze zbylé části ohnutím vytvořit krabičku tvaru kvádru. Jak dlouhé musí být strany vyříznutých čtverců, aby objem vzniklé krabičky byl co největší?

Řešení:



$$V = (50-2x)^2 \cdot x$$

$$V = (2500 - 200x + 4x^2) \cdot x$$

$$V = 2500x - 200x^2 + 4x^3$$

$$V' = 12x^2 - 400x + 2500$$

$$V' = 0$$

$$12x^2 - 400x + 2500 = 0 \quad | : 4$$

$$3x^2 - 100x + 625 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 12 \cdot 625}}{6} = \frac{100 \pm 50}{6}$$

$$\underbrace{x_1 = 25}, \quad x_2 = 8\tfrac{1}{3}$$

nevyhovuje (nic by nezbylo)

$$\boxed{x_2 = 8\tfrac{1}{3}\,(\mathrm{cm})}$$

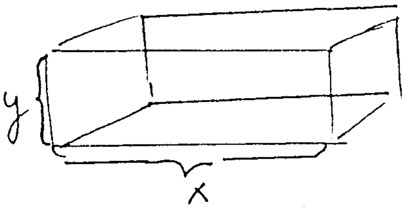
$$V'' = 24x - 400$$

$$V'' = 24 \cdot 8\tfrac{1}{3} - 400 = -200 < 0,$$

jde o maximum.

Musí být odříznuty čtverce se stranami dlouhými $8\frac{1}{3}$ cm.

Příklad 7: Nádrž na vodu má mít čtvercové dno, objem 256 m^3 a tvar kvádru. Určete takové rozměry nádrže, aby na obložení stěn a dna se spotřebovalo co nejméně obkladaček.



Poznámka: Při řešení této úlohy, ale i jiných, kde jsou dvě proměnné, se musím předem rozhodnout podle které z nich budu derivovat. V našem případě to bude proměnná x.

$$\underline{V = 256\ m^3}$$

$$256 = x^2 y$$

$$y = \frac{256}{x^2}$$

$$S = x^2 + 4xy$$

$$S = x^2 + 4x \cdot \frac{256}{x^2}$$

$$S = x^2 + \frac{1024}{x}$$

$$S' = 2x + \frac{1024' \cdot x - 1024 \cdot x'}{x^2} =$$

$$= 2x + \frac{0 - 1024 \cdot 1}{x^2} = 2x - \frac{1024}{x^2} = S'$$

$$S' = 0$$

$$2x - \frac{1024}{x^2} = 0$$

$$2x = \frac{1024}{x^2} \quad | \cdot x^2$$

$$2x^3 = 1024 \quad | : 2$$

$$x^3 = 512$$

$$x = \sqrt[3]{512}$$

$$\boxed{x = 8}$$

$$y = \frac{256}{8^2}$$

$$\boxed{y = 4}$$

$$S'' = \left(2x - \frac{1024}{x^2}\right)'$$

$$S'' = 2 - \frac{1024' \cdot x^2 - 1024 \cdot 2x}{x^4}$$

$$S'' = 2 - \frac{0 - 2048x}{x^4}$$

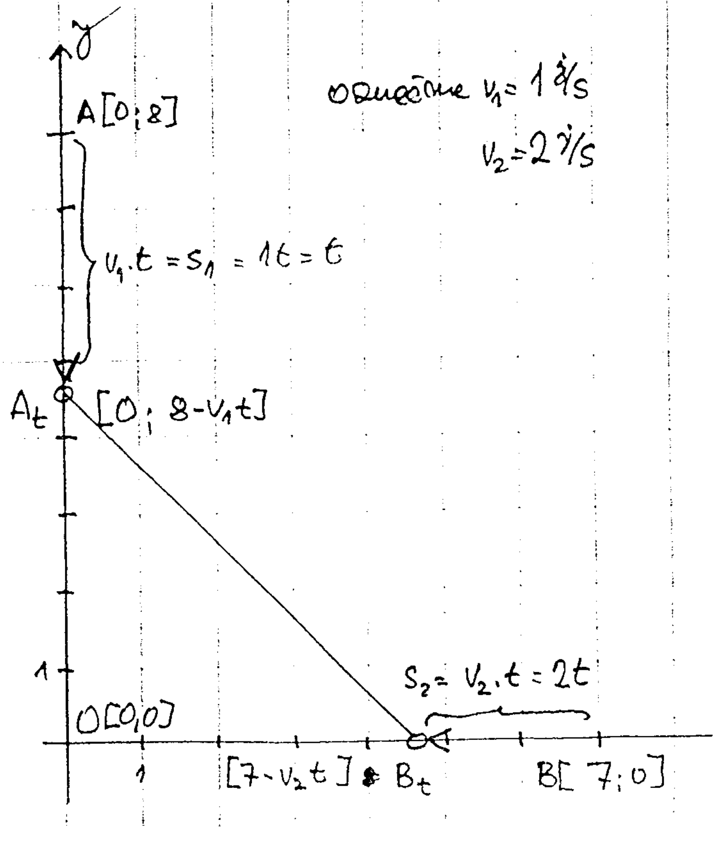
$$S'' = 2 + \frac{2048}{x^3} = 2 + 4 = 6 > 0$$

$\Rightarrow$ minimum

Kvádr má rozměry 8 m, 8 m a 4 m.

Příklad 8: Vzpomínané pořadnice jsou umístěny body A[0;8], B[7;0]. V určité okamžik se dají oba body do pohybu po osách souřadnic směrem k počátku O[0;0]. Bod A se pohybuje rychlostí 1 j/s, B 2 j/s. Po kolika sekundách bude |AB| nejkratší?

Řešení: Po uplynutí t sekund bude bod A v poloze A_t, bod B v poloze B_t. Jejich vzdálenost je $|A_t B_t| = l$ (jednotek).



Vzdálenost l tj. je funkcí času t. Pro tuto vzdálenost platí vzorec: $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ... lze i vektorově

$$l(t)=\sqrt{[(7-2t)-0]^2+[0-(8-1t)]^2}=\sqrt{49-28t+4t^2+64-16t+t^2}=$$

$$=\sqrt{5t^2-44t+113} \quad \dots \boxed{l(t)=(5t^2-44t+113)^{\frac{1}{2}}}$$

$$l'(t)=\frac{1}{2}(5t^2-44t+113)^{-\frac{1}{2}}\cdot(10t-44)=\frac{10t-44}{2\sqrt{5t^2-44t+113}}$$

$$l'(t)=\frac{\cancel{2}(5t-22)}{\cancel{2}\cdot\sqrt{5t^2-44t+113}}=\frac{5t-22}{\sqrt{5t^2-44t+113}}$$

$l'(t)=0$ v případě, že $5t-22=0$

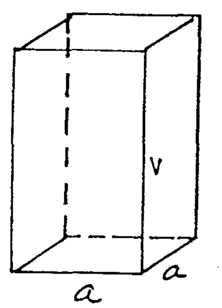
$$5t=22$$

$$\boxed{t=4{,}4}$$

Pomocí změn znaménka 1. derivace kolem bodu $t=4{,}4$ zjistíme, že jde o minimální vzdálenost, aniž bychom počítali $l''(t)$.

Nejkratší vzdálenost nastane po uplynutí 4,4 s.

Příklad 9: Určete délku podstavné hrany a a výšku v pravidelného čtyřbokého hranolu, který má při daném povrchu S maximální objem V. (Řešte pro $S=864\,cm^2$.)



Řešení: Protože máme určit maximální objem, tak musíme derivovat vzorec pro objem.

$$S=2a^2+4av \qquad V=a^2v$$

$$4av=S-2a^2$$

$$v=\frac{S-2a^2}{4a}$$

$$V=a^2\cdot\frac{S-2a^2}{4a}=\frac{a(S-2a^2)}{4}=\frac{aS-2a^3}{4}=$$

$$V=\frac{aS}{4}-\frac{2a^3}{4}=\frac{S}{4}\cdot a-\frac{1}{2}a^3$$

$$V=\frac{S}{4}\cdot a-\frac{1}{2}a^3$$

$$V'=\left(\frac{S}{4}a\right)'-\left(\frac{1}{2}a^3\right)'=$$

$$\boxed{V'=\frac{S}{4}-\frac{3}{2}a^2}\ , \quad V'=0$$

$$\frac{S}{4}-\frac{3}{2}a^2=0$$

$$\frac{3}{2}a^2=\frac{S}{4}$$

$$a^2=\frac{S}{4}\cdot\frac{2}{3}$$

$$a^2=\frac{2S}{12}=\frac{S}{6}$$

$$\boxed{a=\sqrt{\frac{S}{6}}}$$ jen kladný kořen

$$v=\frac{S-2\cdot\left(\sqrt{\frac{S}{6}}\right)^2}{4\cdot\sqrt{\frac{S}{6}}}=\frac{S-\frac{S}{3}}{4\cdot\sqrt{\frac{S}{6}}}=$$

$$=\frac{\frac{2S}{3}}{\frac{4\sqrt{\frac{S}{6}}}{1}}=\frac{2S}{12\sqrt{\frac{S}{6}}}=\frac{S}{6\sqrt{\frac{S}{6}}}=$$

$$\frac{S\sqrt{\frac{S}{6}}}{6\cdot\sqrt{\frac{S}{6}}\cdot\sqrt{\frac{S}{6}}}=\frac{S\sqrt{\frac{S}{6}}}{6\cdot\frac{S}{6}}=\boxed{v=\sqrt{\frac{S}{6}}}$$

Pro $a=\sqrt{\frac{S}{6}}$ a $v=\sqrt{\frac{S}{6}}$ je požadovaný hranol krychle. (Pro $S=864\,cm^2$ je $a=12$, $v=12\,cm$).

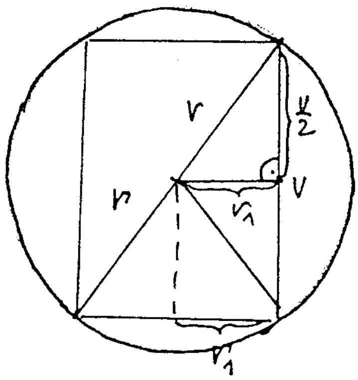
Příklad 10:

Určete okamžitou rychlost hmotného bodu při volném pádu v čase $t_0 = 2s$.

Řešení: Okamžitá rychlost je derivace dráhy podle proměnné, kterou je čas.

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \quad \dots \quad s' = 2t \cdot \frac{g}{2} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{g}{2} = \boxed{2g}$$

Příklad 11 (4.56 (131) – uč: Do koule s poloměrem r vepište rotační válec maximálního objemu



$$V_{válce} = V_v = \pi r_1^2 v \quad \dots \quad r_1 = \sqrt{r^2 - \left(\frac{v}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{v^2}{4}}$$

$$V_v = \pi \cdot \left(\sqrt{r^2 - \frac{v^2}{4}}\right)^2 \cdot v$$

$$V_v = \pi \cdot \left(r^2 - \frac{v^2}{4}\right) \cdot v$$

$$V_v = \pi r^2 v - \frac{\pi}{4} v^3 \quad \dots \text{ derivujme podle proměnné } v$$

$$V_v' = \pi r^2 - \frac{3}{4} \pi v^2 \quad , \quad V_v' = 0 \iff \pi r^2 = \frac{3}{4} \pi v^2 \quad |:\pi$$

$$r^2 = \frac{3v^2}{4}$$

$$3v^2 = 4r^2$$

$$v^2 = \frac{4r^2}{3}$$

$$v = \sqrt{\frac{4r^2}{3}}$$

$$\boxed{v = \frac{2}{\sqrt{3}} r}$$

Dosadíme do

$$r_1 = \sqrt{r^2 - \frac{v^2}{4}} = \sqrt{r^2 - \frac{\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^2}{4}} = \sqrt{r^2 - \frac{\frac{4r^2}{3}}{\frac{4}{1}}} =$$

$$= \sqrt{r^2 - \frac{4r^2}{12}} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{3}} = \sqrt{\frac{3r^2 - r^2}{3}} = \sqrt{\frac{2r^2}{3}}$$

$$\boxed{r_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} r}$$

Požadovaný válec má poloměr podstavy $r_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} r$ a výšku $v = \frac{2}{\sqrt{3}} r$.
