3. Základy počtu pravděpodobnosti

3.1 Jednoduchá pravděpodobnost

① Jaká je pravděpodobnost, že při vrhu hrací kostkou padne číslo 3?

Označíme-li jev „padne číslo 3" proměnnou A, platí:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{\text{počet všech příznivých výsledků}}{\text{počet všech možných výsledků}}$$

$P(A) = \boxed{\frac{1}{6}}$ ... jedna trojka / šest čísel

---

② Jaká je pravděpodobnost, že při vrhu hrací kostkou padne číslo a) dělitelné dvěma,
b) dělitelné třemi,
c) dělitelné dvěma a třemi.

(Ve sbírce je uvedeno chybně „dvěmi".)

Řešení:

a) 1 $\boxed{2}$ 3 $\boxed{4}$ 5 $\boxed{6}$ ... tři čísla jsou dělitelná 2

$P(A) = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$

b) třemi jsou dělitelná čísla 3 a 6 $P(B) = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$

c) dvěma a zároveň třemi je dělitelné pouze číslo 6.

$P(C) = \boxed{\frac{1}{6}}$

---

③ Napíšeme-li libovolné přirozené číslo od 1 do 15, jaká je pravděpodobnost, že to a) bude prvočíslo,
b) nebude prvočíslo?

1 $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 4 $\boxed{5}$ 6 $\boxed{7}$ 8 9 10

$\boxed{11}$ 12 $\boxed{13}$ 14 15 $P(A) = \frac{6}{15} = \boxed{\frac{2}{5}}$ $P(B) = \frac{9}{15} = \boxed{\frac{3}{5}}$

④ Ze třídy, ve které je 14 chlapců a 17 dívek, byla náhodně vybrána skupina 5 studentů. Jaká je pravděpodobnost, že v ní byli
a) 2 chlapci a 3 dívky, b) 3 chlapci a 2 dívky, c) 4 chl. a 1 dívka?

Řešení: $14+17=31$

Pravděpodobnost, že to budou samí chlapci je $\binom{14}{2}$ ... počet 2 prv. kombinací

" " " " samé dívky je $\binom{17}{3}$ ... počet 3 prv. kombinací

Všechny příznivé pětice studentů vytvoříme podle kombinatorického pravidla součinu: $\binom{14}{2}\cdot\binom{17}{3}$. Počet všech možných pětic studentů ze 31 studentů je $\binom{31}{5}$. Označme jev a) proměnnou A, jev b) proměnnou B a jev c) prom. C. Platí:

$$a)\ P(A)=\frac{\binom{14}{2}\cdot\binom{17}{3}}{\binom{31}{5}}=\frac{91\cdot 680}{169\,911}\doteq\boxed{0{,}364\,2}$$ ... asi 36%

$$b)\ P(B)=\frac{\binom{14}{3}\cdot\binom{17}{2}}{\binom{31}{5}}=\frac{364\cdot 136}{169\,911}\doteq\boxed{0{,}291\,135}$$ ... asi 29%

$$c)\ P(C)=\frac{\binom{14}{4}\cdot\binom{17}{1}}{\binom{31}{5}}=\frac{1001\cdot 17}{169\,911}\doteq\boxed{0{,}100\,152}$$ ... asi 10%

---

⑤ V osudí je 8 bílých a 6 černých koulí. Náhodně vytáhneme 4 koule. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi budou a) 2 bílé, b) 3 bílé, c) 4 bílé koule?

$$a)\ P(A)=\frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{14}{4}}=\frac{28\cdot 15}{1001}\doteq\boxed{0{,}4196}$$ ... asi 42%

14 je počet všech koulí

$$b)\ P(B)=\frac{\binom{8}{3}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{14}{4}}=\frac{56\cdot 6}{1001}\doteq 0{,}335\,664\doteq\boxed{0{,}3357}$$ .. asi 33,57%

---

⑥ V sérii 40 výrobků je 5 zmetků. Náhodně vybereme 3 výrobky. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi budou
a) 2 zmetky b) 1 zmetek c) žádný zmetek ?

Řešení: Vybíráme trojice. Počet všech trojic výrobků ze 40 je počet kombinací třetí třídy ze 40, tj. $\binom{40}{3}$.
Počet všech možných trojic zmetků je $\binom{5}{3}$.
" " " dobrých trojic výrobků je $\binom{35}{3}$ ... 40-5=35.

a) Počet všech možných dvojic zmetků je $\binom{5}{2}$. Když jsou v trojici výrobků 2 zmetky, tak jeden výrobek je dobrý, a ten vybíráme ze 35. Platí proto:

$$P(A)=\frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{35}{1}}{\binom{40}{3}}=\frac{10\cdot 35}{9880}\doteq\boxed{0{,}035\,425}$$ ... asi 3,5%

b) $$P(B)=\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{35}{2}}{\binom{40}{3}}=\frac{5\cdot 595}{9880}\doteq\boxed{0{,}301\,133}$$ ... asi 30,1%

c) $$P(C)=\frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{35}{3}}{\binom{40}{3}}=\frac{1\cdot 6545}{9880}\doteq\boxed{0{,}662\,449}$$ ... asi 66,2%

⑦ Při hře o 32 kartách bylo rozdáno 8 karet. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi byla
a) 4 esa b) 2 esa c) 1 eso ?

Řešení:
$\binom{32}{8}$ je počet kombinací po 8 kartách,
$\binom{4}{4}$ " " " , čtveřic es ze 4 es,
$\binom{28}{4}$ " " " 4 karet, ve kterých není eso.

a) $$P(A)=\frac{\binom{28}{4}\cdot\binom{4}{4}}{\binom{32}{8}}=\frac{20475\cdot 1}{10\,518\,300}\doteq\boxed{0{,}001\,946\,6..}$$ 0,19 %

b) $\binom{28}{6}$ .. počet všech šestic karet bez es.

$\binom{4}{2}$ .. počet všech dvojic es.

$$P(B) = \frac{\binom{28}{6}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{32}{8}} = \frac{376\,740 \cdot 6}{10\,518\,300} \doteq \boxed{0{,}214\,905} \text{.. asi } 21{,}4\,\%$$

$$c)\ P(C) = \frac{\binom{28}{7}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{32}{8}} = \frac{1\,184\,040 \cdot 4}{10\,518\,300} \doteq \boxed{0{,}450\,278} \text{.. asi } 45\,\%$$

---

8 V osudí je 12 lístků bílých, 10 červených a 14 zelených. Náhodně vybereme 6 lístků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi budou

a) 2 bílé, 2 červené a 2 zelené, $12 + 10 + 14 = 36$

b) 1 bílý, 2 červené a 3 zelené,

c) 3 bílé, 1 červený a 2 zelené?

$$a)\ P(A) = \frac{\binom{12}{2}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{14}{2}}{\binom{36}{6}} = \frac{66 \cdot 45 \cdot 91}{1\,947\,792} \doteq \boxed{0{,}138\,757} \text{ ..asi } 13{,}9\,\%$$

$$b)\ P(B) = \frac{\binom{12}{1}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{14}{3}}{\binom{36}{6}} = \frac{12 \cdot 45 \cdot 364}{1\,947\,792} \doteq \boxed{0{,}100\,914} \text{.. asi } 10{,}1\,\%$$

$$c)\ P(C) = \frac{\binom{12}{3}\cdot\binom{10}{1}\cdot\binom{14}{2}}{\binom{36}{6}} \doteq \boxed{0{,}102\,783} \text{ ... asi } 10{,}3\,\%$$

---

9 Ve Sportce je ze 49 čísel vylosováno 6. Určete pravděpodobnost výhry

a) 1. pořadí b) ve 2. pořadí c) ve třetím pořadí?

! Neidříme si prostudovat 4 řešení příkladu 10.

a) Výhra v 1. pořadí (uhodnuto 6 čísel), tedy $m(A)=1$

$$P(A) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \boxed{7{,}151\,123\,842 \cdot 10^{-8}}$$

b) Výhra v 2. pořadí (uhodnuto 5 čísel)

$$P(B) = \frac{\underbrace{\binom{6}{5}}_{\text{Počet příznivých pětic}} \cdot \underbrace{\binom{43}{1}}_{\text{Počet nepříznivých „jedinic"}}}{\binom{49}{6}} \doteq \boxed{1{,}844989951 \cdot 10^{-5}}$$

$6+43=49$
$5+1=6$

c) Výhra ve 3. pořadí (uhodnuta 4 čísla)

$$P(C) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \doteq \boxed{9{,}686\,197\,244 \cdot 10^{-4}}$$

$6+43=49$
$4+2=6$

(10) V „Matesu" bylo kdysi losováno 5 čísel ze 35. Jaká byla pravděpodobnost, že vyhraji na 1 vyplněný tiket a) 1. pořadí, b) 2. pořadí?

Řešení:

a) v 1. pořadí (uhodnuto 5 čísel) … jev A

b) v 2. pořadí (uhodnuta 4 čísla) … jev B

a) $m = \binom{35}{5}$, výhra pro 1 prvek, tedy $m(A)=1$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{1}{\binom{35}{5}} \doteq 0{,}000\,003\,080\,411 \doteq \boxed{3{,}08 \cdot 10^{-6}}$$

b) $m = \binom{35}{5}$. Počet možností pro uhodnutí 4 čísel z 5 tažených čísel je $\binom{5}{4}$. Jedna tažená (tedy platná) čtveřice se pak může spojit s každým číslem do pětice ze zbytku netažených čísel, tj. s 30 (=35−5). Tuto čtveřici nelze spojovat s 5. tažným číslem, neboť by vzniklo 1. pořadí. Proto platí:

$$P(B)=\frac{m(B)}{m}=\frac{\binom{5}{4}\cdot\binom{30}{1}}{\binom{35}{5}}\doteq 4{,}620\,616\,575\cdot 10^{-4}\doteq \boxed{4{,}62\cdot 10^{-4}}$$

---

(11) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma hracími kostkami (pro názor odlišujeme barvou, např. kostka modrá a červená) padne součet

a) 3, b) 4, c) 6, d) 8, e) 10, f) 12 ?

a) Všechny možné součty vyjadřuje množina dvouprvkových variací s opakováním ze 6 prvků (šesti čísel)

Jev A: Padne součet 3 $A=\{[1,2],[2,1]\}$ ... 2 příznivé výsledky

$m(A)=2$

$m=V'=n^k=6^2=36$, $m=36$

$P(A)=\frac{2}{36}=\boxed{\frac{1}{18}}$ ... $0{,}0\overline{5}=0{,}0555$ ... asi 5,6 %

---

b) Padne součet 4 je jev B, $B=\{[1;3],[3;1],[2;2]\}$, $m(B)=3$

$P(B)=\frac{m(B)}{m}=\frac{3}{36}=\boxed{\frac{1}{12}}$ ... asi 8,3 %

---

c) Padne součet 6 je jev C, $C=\{[5;1],[1;5],[4;2],[2;4],[3;3]\}$

$m(C)=5$ $P(C)=\boxed{\frac{5}{36}}$

---

d) Jev D: Padne součet 8, $D=\{[4;4],[6;2],[2;6],[3;5],[5;3]\}$

$m(C)=5$ $P(D)=\boxed{\frac{5}{36}}$

---

e) Jev E: Padne součet 10, $E=\{[5;5],[6;4],[4;6]\}$, $m(E)=3$

$P(E)=\frac{3}{36}=\boxed{\frac{1}{12}}$

---

f) Jev F: Padne součet 12 ; $F=\{\underbrace{[6;6]}_{1}\}$ $P(F)=\boxed{\frac{1}{36}}$

---

(12) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu třemi hracími kostkami padne součet:

a) 3 b) 5 c) 7 d) 8 e) 10 f) 13 g) 15 ?

Řešení:

a) Počet všech uspořádaných trojic čísel ze 6 čísel (1,2,3,4,5,6) se rovná počtu všech trojprvkových variací s opakováním.

$m = V' = n^k = 6^3 = 216$

Součet 3 padne jen jednou, a to 1+1+1

$P(A) = \boxed{\frac{1}{216}}$

Předběžná úvaha pro součet 11. Ten může vzniknout z čísel

6,4,1	6,1,4	4,1,6	4,6,1	1,4,6	1,6,4	… 6	uspořádaných	trojic
6,3,2	6,2,3	2,3,6	2,6,3	3,6,2	3,2,6	… 6	"	"
5,4,2	…					… 6	"	"
5,5,1	5,1,5	1,5,5				3	"	"
5,3,3						3	"	"
4,4,3						3	"	"
					Součet	27		

$P(X) = \frac{m(X)}{m} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$

Poznámka: V a) šlo o trojici čísel 1,1,1 … ta dává pouze 1 uspořádanou trojici.

Podle tohoto návodu budeme nyní postupovat. K tomu dodejme, že počet příznivých výsledků dostaneme tak, že každou z uvedených kombinací rozpočítáme taktéž, kolik uspořádaných trojic jí odpovídá.

b) Součet 5 vznikne z čísel:

1, 2, 2 , to dá 3 uspořádané trojice
1, 1, 3 , " " 3 " "

$m(B) = 6$

$P(B) = \frac{6}{216} = \boxed{\frac{1}{36}}$

c) Součet 7 vznikne ze součtů:

1, 1, 5 , to dá 3 uspořádané trojice
1, 2, 4 , " " 6 " "
2, 2, 3 , " " 3 " "
1, 3, 3 , " " 3 " " ,

$m(C) = 15$

$P(C) = \frac{15}{216} = \boxed{\frac{5}{72}}$

d) Součet 8 vznikne ze součtů:

$$\left.\begin{array}{l} 1,1,6 \ \dots \ 3 \\ 1,2,5 \ \dots \ 6 \\ 1,3,4 \ \dots \ 6 \\ 2,2,4 \ \dots \ 3 \\ 2,3,3 \ \dots \ 3 \end{array}\right\} \text{21 uspoř. trojic}$$

$P(D) = \frac{21}{216} = \boxed{\frac{7}{72}}$

e) Součet 10 vznikne ze součtů:

$$\left.\begin{array}{l} 1,4,5 \ \dots \ 6 \\ 2,3,5 \ \dots \ 6 \\ 2,2,6 \ \dots \ 3 \\ 3,3,4 \ \dots \ 3 \\ 4,4,2 \ \dots \ 3 \\ 6,1,3 \ \dots \ 6 \end{array}\right\} \text{27 uspoř. trojic}$$

$P(E) = \frac{27}{216} = \boxed{\frac{1}{8}}$

f) Součet 13 vznikne ze součtů: $\underbrace{[6,6,1]}_{3}, \underbrace{[6,5,2]}_{+\ 6}, \underbrace{[6,4,3]}_{6}$

$\underbrace{[5,5,3]}_{3}, \underbrace{[5,4,4]}_{+\ 3} = 21$ usp. trojic

$P(F) = \frac{21}{216} = \boxed{\frac{7}{72}}$

g) Součet 15 vznikne se sčítanců:

5, 5, 5 ... dá 1 usp. trojici
6, 6, 3 ... " 3
4, 5, 6 ... " 6

$m(G) = 10$

$P(G) = \frac{10}{216} = \boxed{\frac{5}{108}}$

---

(13) Jaký součet má při hodu 3 kostkami největší pravděpodobnost?
Podle výsledků, to má být součet 10 a 11. Součet 11 jsem spočítal na str. (7) dole zprava.

$P(11) = \frac{1}{8}$ (= 12,5 %)

Pro součet 10 platí:

6, 3, 1 ... 6
6, 2, 2 ... 3
5, 4, 1 ... 6
4, 3, 3 ... 3
5, 3, 2 ... 6
4, 4, 2 ... 3

$\}\ 27$

$P(10) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$ (= 12,5 %)

Ostatní samostatně.

Největší pravděpodobnost má součet 10 a 11, je 12,5 procenta.

---

(14) Vypočítejte pravděpodobnost, že při hodu 3 kostkami padne součet dělitelný a) čtyřmi, b) pěti?

a) Vhodné jsou pouze součty 4, 8, 12 a 16.
Součet 4 vznikne ze sčítanců
1, 1, 2 ... $\boxed{3}$ uspořádané trojice.
Součet 8 už jsme počítali, vyhovuje $\boxed{21}$ uspoř. trojic.
Součet 12 vznikne ze sčítanců:

$$\left.\begin{array}{l} 6,5,1 \ldots 6 \\ 5,5,2 \ldots 3 \\ 5,3,4 \ldots 6 \\ 4,4,4 \ldots 1 \\ 3,3,6 \ldots 3 \\ 2,4,6 \ldots 6 \end{array}\right\} \boxed{25} \text{ uspořádaných trojic}$$

Součet 16 vznikne ze sčítanců $\left.\begin{array}{l} 6,6,4 \ldots 3 \\ 6,5,5 \ldots 3 \end{array}\right\} \boxed{6}$ usp. trojic

$$3 + 21 + 25 + 6 = 55 \quad P(A) = \frac{55}{216} \doteq \boxed{0{,}254\,629\,629} \text{ asi } 25{,}5\,\%$$

---

b) Vhodné jsou pouze součty 5, 10, 15

ty jsme počítali, proto platí: $6 + 27 + 10 = 43$

$$P(A) = \frac{43}{216} \doteq \boxed{0{,}199}$$

KONEC ČLÁNKU 3.1