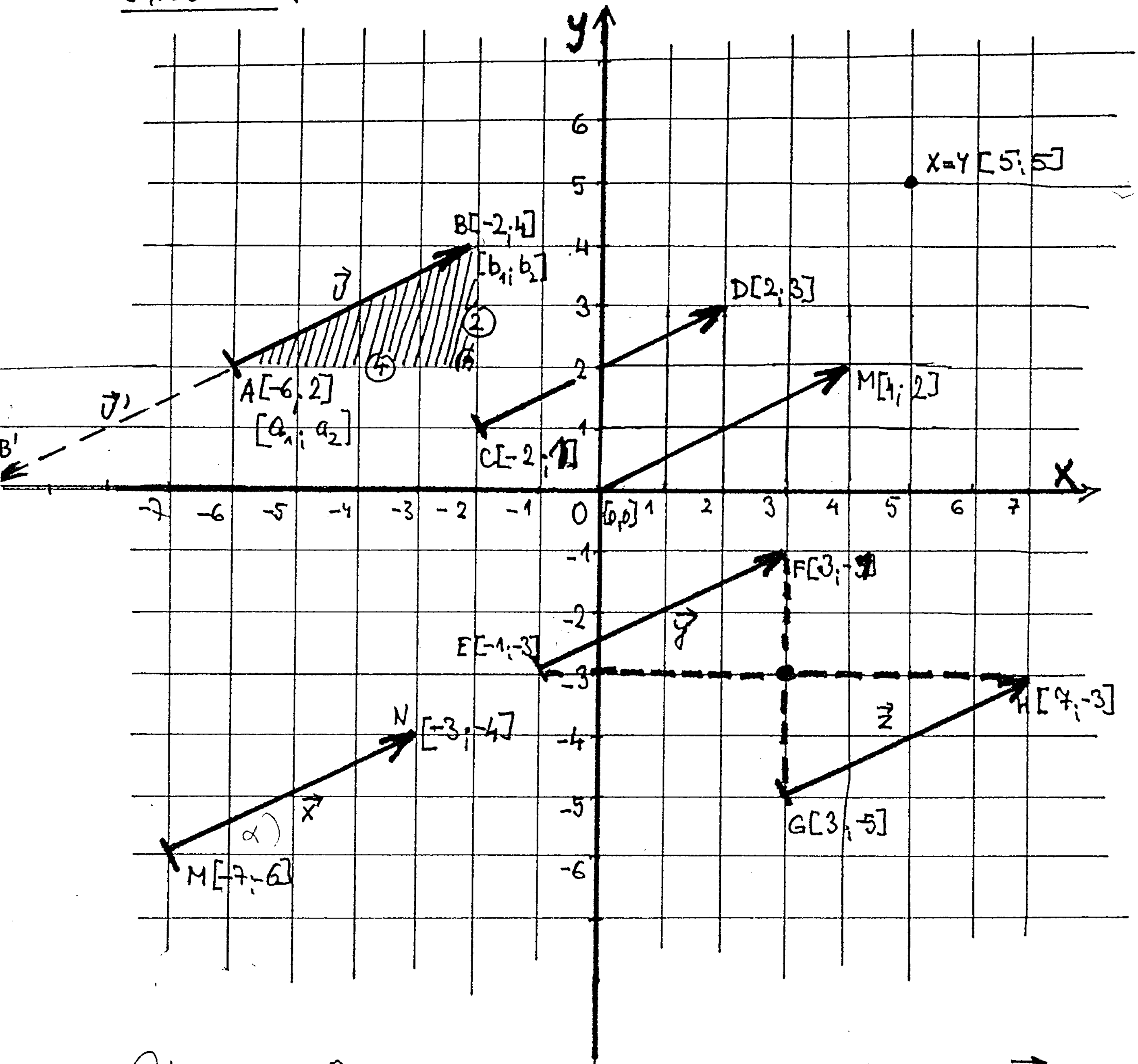
9b) VEKTORY A OPERACE S NIMI

Příklady:



V rovině Oxy je vyznačena orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ (jinak řečeno uspořádaná dvojice bodů A, B). Tuto orientovanou úsečku nazýváme vektorem (též vázaným vektorem).

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, respektive $\vec{u} = B - A$

Bod A se nazývá počáteční bod vektoru $\vec{u}$.

-||- B -||- koncový bod -||- .

Vektor $\vec{u'} = \overrightarrow{AB'}$ se nazývá opačný vektor k vektoru $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Poznámka: Jestliže pro body X, Y platí $X=Y$, pak $\overrightarrow{XY}$ nazýváme nulovým vektorem.

Orientované úsečky budou představovat stejný vektor, jestliže
1. budou stejně velké (budou mít stejnou velikost či délku),
2. budou mít stejný směr.

Na obr. na str. 1 platí: $\vec{u}=\vec{v}=\vec{x}=\vec{y}=\vec{z}$.

> **Definice 1:** Je-li vektor $\vec{u}$ určen orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$, kde $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$, pak čísla $u_1=b_1-a_1$, $u_2=b_2-a_2$ se nazývají souřadnice vektoru. Zapisujeme $\vec{u}=(u_1; u_2)$.

V obr. na str. 1 platí: $A[\underset{a_1}{-6}; \underset{a_2}{2}]$, $B[\underset{b_1}{-2}; \underset{b_2}{4}]$;

$$\underbrace{\begin{array}{l|l} u_1=b_1-a_1 & u_2=b_2-a_2 \\ u_1=-2-(-6) & u_2=4-2 \\ u_1=-2+6 & \boxed{u_2=2} \\ \boxed{u_1=4} & \end{array}}_{\vec{u}=(4;2)}$$

Vektor $\vec{u}=B-A$ má souřadnice $4;2$.

Příklad 2: Přesvědčte se, že také vektory $\vec{v}$, $\vec{x}$ a další mají stejné souřadnice jako vektor $\vec{u}$.

Řešení: $\vec{x}=N-M$

$$\left.\begin{array}{l} u_1=-3-(-7)=-3+7=4 \\ u_2=-4-(-6)=-4+6=2 \end{array}\right\} \vec{x}=(4;2)$$

$$\vec{v}=D-C \dots \left.\begin{array}{l} v_1=2-(-2)=2+2=4 \\ v_2=3-1=2 \end{array}\right\} \vec{v}=(4;2)$$

Příklad 3: V rovině jsou dány body A, B. Vypočítejte souřadnice vektoru $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ ($\vec{v} = B - A$), je-li dáno:

a) $A[3;2]$, $B[-2;4]$

Řešení: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-2-3;\ 4-2) = (-5;2)$ ... $\boxed{\vec{v} = (-5;2)}$

---

b) $A[-1;-6]$, $B[2;-5]$

Řešení: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = [2-(-1);\ -5-(-6)] = (2+1;\ -5+6) = (3;1)$ ... $\boxed{\vec{v} = (3;1)}$

---

c) $A[-0{,}6;\ 1{,}7]$, $B[2{,}4;\ -0{,}8]$

Řešení: $\vec{v} = [2{,}4-(-0{,}6);\ -0{,}8-1{,}7] = (2{,}4+0{,}6;\ -2{,}5) = (3;\ -2{,}5)$ ... $\boxed{\vec{v} = (3;\ -2{,}5)}$

---

d) $A\left[\frac{3}{2};\ -\frac{5}{6}\right]$, $B\left[-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\right]$

Řešení: $\vec{v} = \left[-\frac{1}{2}-\frac{3}{2};\ -\frac{1}{3}-\left(-\frac{5}{6}\right)\right] = \left(-\frac{4}{2};\ -\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\right) = \left(-2;\ \frac{1}{2}\right)$ ... $\boxed{\vec{v} = \left(-2;\ \frac{1}{2}\right)}$

Příklad 4: Zjistěte, zda orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ je zobrazení vektorem $\vec{u} = (5;-3)$, je-li dáno:

a) $A[-3;2]$, $B[2;-1]$

Řešení: $\overrightarrow{AB} = B - A = [2-(-3);\ -1-2] = (2+3;\ -3) = (5;-3)$

Vektor $\overrightarrow{AB} = (5;-3)$ a vektor $\vec{u} = (5;-3)$ mají stejné souřadnice

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

b) $A[-1;-1]$, $B[4;-2]$

Řešení: $\overrightarrow{AB} = B - A = [4-(-1);\ -2-(-1)] = (4+1;\ -2+1) = (5;-1)$

Vektor $\overrightarrow{AB} = (5;-1)$ a vektor $\vec{u} = (5;-3)$ nemají stejné souřadnice

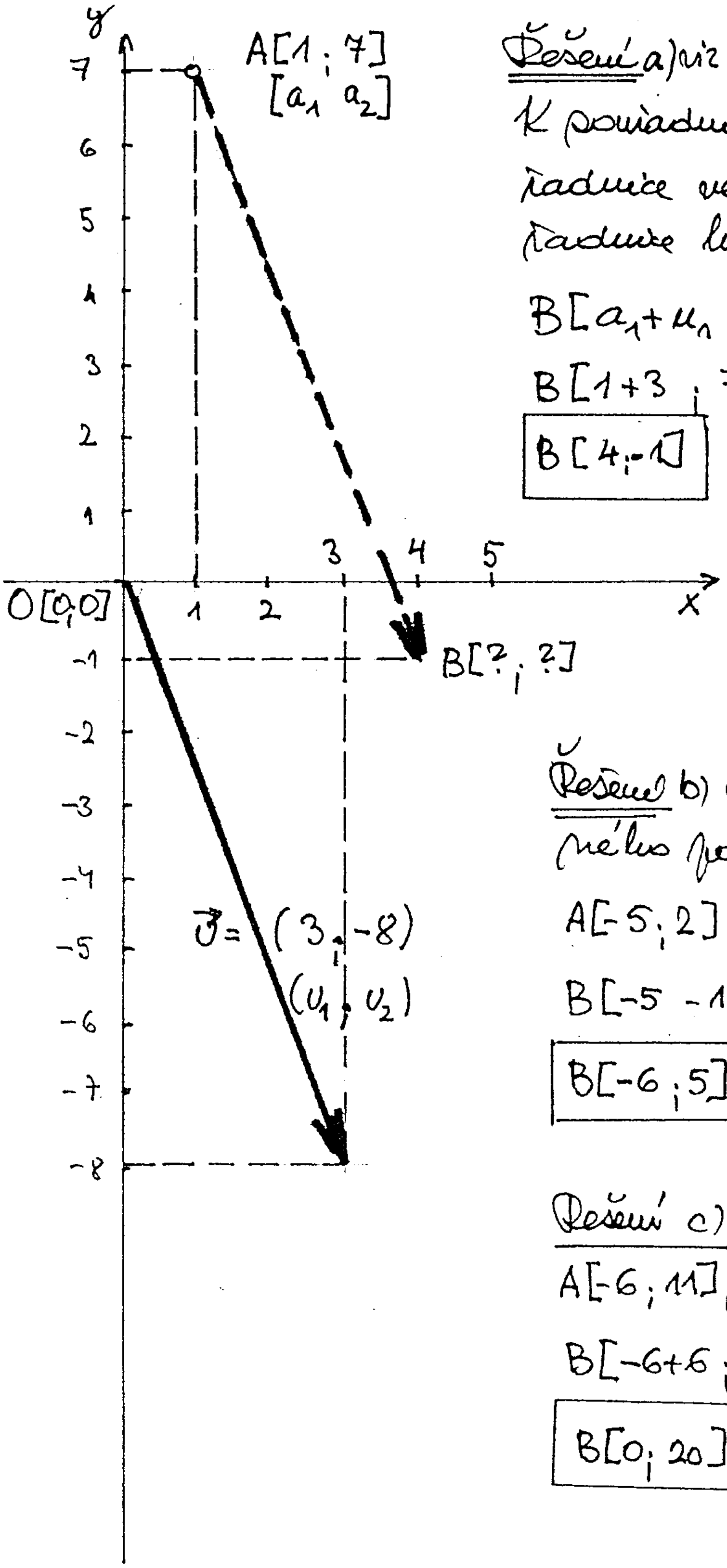
$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \neq \vec{u}$.

Příklad 5: Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ je umístěním vektoru $\vec{v}$. Určete souřadnice koncového bodu B, je-li dáno:

a) $A[1;7]$, $\vec{v} = (3;-8)$

b) $A[-5;2]$, $\vec{v} = (-1;3)$

c) $A[-6;11]$, $\vec{v} = (6;9)$



Řešení a) viz obr.

K souřadnicím bodu A přičteme souřadnice vektoru $\vec{u}$ a získáme souřadnice bodu B.

$B[a_1+u_1 ; a_2+u_2]$

$B[1+3 ; 7-8]$

$\boxed{B[4;-1]}$ je požadovaný výsledek.

Řešení b) provedeme podle výše uvedeného postupu.

$A[-5;2]$, $\vec{u}=(-1;3)$

$B[-5-1 ; 2+3]$

$\boxed{B[-6;5]}$

Řešení c)

$A[-6;11]$, $\vec{u}=(6,9)$

$B[-6+6 ; 11+9]$

$\boxed{B[0;20]}$

Příklad 6: V prostoru jsou dány body $A[3,2,-1]$, $B[-2,-3,0]$, $C[6,3,-5]$. Určete souřadnice vektorů $\vec{u} = B-A$, $\vec{v} = C-B$, $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$

Řešení: $\vec{u}=(-5,-5,1)$ $\vec{v}=(-4,6,-5)$ $\vec{w} = \overrightarrow{AC} = C-A = (-9,1,-4)$

Každý vektor má v rovině i v prostoru nekonečně mnoho umístění. Jedno z nich je takové umístění, že jeho počáteční bod splyne s počátkem os souřadnic O[0;0], respektive O[0;0;0]. Takovým vektorem na obr. 1 je vektor $\vec{OM}$.

<u>Příklad 7:</u> Jsou dány body:

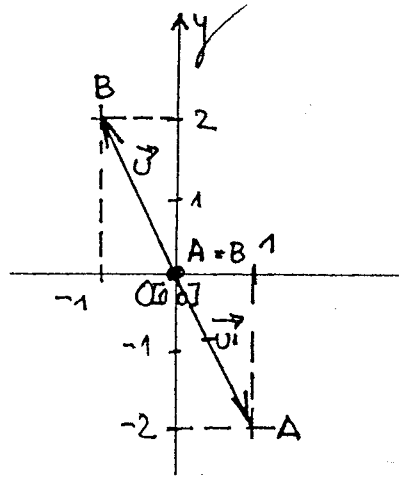
a) A[−1;2], B[−2;4]   b) M[3;1;0], N[6;2;−7]

Určete 1) $\vec{u} = B - A$ a opačný vektor $-\vec{u} = A - B$.

2) $\vec{a} = N - M$ —"— $-\vec{a} = M - N$

<u>Řešení:</u> 1) $\vec{u} = B - A = (-1;2)$

$-\vec{u} = -(-1;2) = (1;-2)$ viz obr. →



2) $\vec{a} = M - N = (-9;-1;7)$

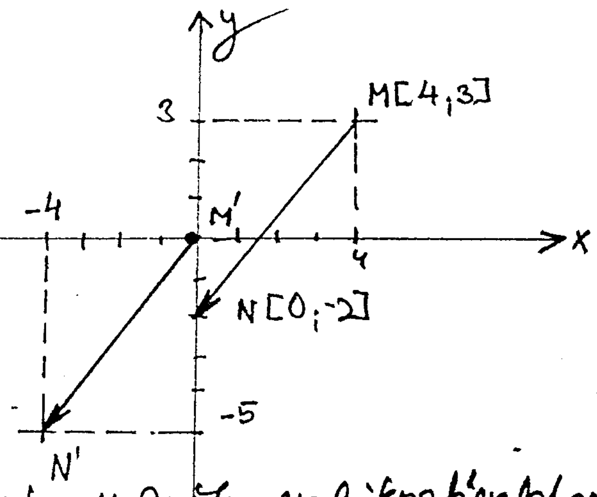
$-\vec{a} = -(-9;-1;7) = (9;1;-7$

<u>Příklad 8:</u> a) V rovině vyznačte body M[4;3], N[0;−2].

b) Vyznačte vektor N−M ($\vec{MN}$).

c) Tak umístěte tento vektor tak, aby jeho počátek M' splynul s počátkem os souřadnic.

<u>Řešení:</u> $\vec{MN} = (0-4; -2-3) = (-4;-5)$



<u>Poznámka:</u> Velmi často budeme dále počítat souřadnice vektorů, aniž bychom vektor umísťovali do soustavy souřadnic.

Tak tomu bude i při následujícím výpočtu velikosti vektorů

Definice 2: Velikost kterékoli orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ určující vektor $\vec{u}$, je rovna velikosti vektoru $\vec{u}$. Označujeme ji symbolem $|\vec{u}|$. Jestliže $|\vec{u}|=1$, nazývá se vektor $\vec{u}$ jednotkový.

Příklad 9: Vypočítejte velikost vektoru $\vec{u}=B-A$, jestliže

a) $A[4,-2]$, $B[-2,-5]$ b) $A[-3\sqrt{5},-4]$, $B[\sqrt{5},-3]$

c) $A[8,-3,-4]$, $B[-3,-1,6]$

Řešení: a) $\vec{u}=B-A=(-6,-3)$

$$\boxed{|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}}$$

$|\vec{u}|=\sqrt{36+9}$

$|\vec{u}|=\sqrt{45}=\boxed{3\sqrt{5}}$

b) $\vec{u}=B-A=(\sqrt{5}+3\sqrt{5},1)=(4\sqrt{5},1)$

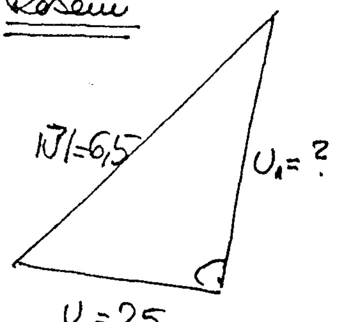
$\vec{u}=\sqrt{(4\sqrt{5})^2+1^2}=\sqrt{80+1}=\sqrt{81}=\boxed{9}$

$\vec{u}=B-A=(-11,2,10)$

$|\vec{u}|=\sqrt{121+4+100}=\sqrt{225}=\boxed{15}$

Příklad 10: Pro vektor $\vec{u}=(u_1,u_2)$ platí: $|\vec{u}|=6{,}5$, $u_2=2{,}5$. Vypočítejte souřadnici u_1.

Řešení



$|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$ | Obě strany rovnice umocníme na druhou.

$|\vec{u}|^2=u_1^2+u_2^2$

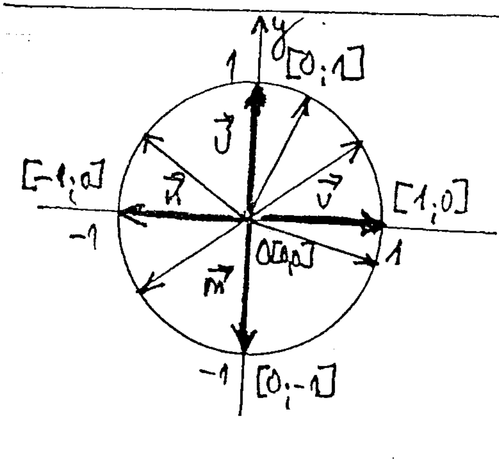
$6{,}5^2=u_1^2+2{,}5^2$

$u_1^2=6{,}5^2-2{,}5^2$

$u_1^2=36$

$u_1=\sqrt{36}$

$\boxed{u_1=6}$



Víme, že pro jednotkový vektor $\vec{v}$ platí: $|\vec{v}|=1$. Všechny vektory vyznačené na obr. jsou jednotkové. Patří mezi ně například:

$\vec{v}=(1;0)$ $\vec{u}=(0;1)$

$\vec{m}=(0;-1)$ $\vec{n}=(-1,0)$

Příklad 11: Rozhodněte, zda vektor $\vec{m} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ je jednotkový.

Řešení: Bude-li jednotkový, pak musí platit:

$$|\vec{m}| = 1$$

Proto počítejme: $|\vec{m}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow \vec{m}$ je jednotkový vektor

---

Příklad 12: Vypočítejte chybějící souřadnici vektoru $\vec{a} = (a_1, a_2)$, je-li:

a) $|\vec{a}| = 26$, $\vec{a} = (24; a_2)$ c) $|\vec{a}| = 0{,}4$, $\vec{a} = (0{,}24; a_2)$

b) $|\vec{a}| = 8{,}6$, $\vec{a} = (a_1; 8{,}4)$

Řešení:

a)
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$
$$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$$
$$26^2 = 24^2 + a_2^2$$
$$a_2^2 = 26^2 - 24^2$$
$$a_2^2 = 100$$
$$a_2 = \sqrt{100}$$
$$\boxed{a_2 = 10}$$

b)
$$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$$
$$8{,}6^2 = a_1^2 + 8{,}4^2$$
$$a_1^2 = 8{,}6^2 - 8{,}4^2$$
$$a_1^2 = 3{,}4$$
$$\boxed{a_1 = \sqrt{3{,}4}}$$

c)
$$a_2^2 = 0{,}4^2 - 0{,}24^2$$
$$a_2^2 = 0{,}1024$$
$$a_2 = \sqrt{0{,}1024}$$
$$\boxed{a_2 = 0{,}32}$$

Příklad 13: Určete čísla r, s tak, aby platilo: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

a) $A[5; -2]$, $B[1; r]$, $\vec{u} = (s; -3)$

b) $A[2r-3; 6]$, $B[4-r; -3]$ $\vec{u} = (-5; s)$ a pak určete velikost vektoru $\overrightarrow{AB}$ $(B-A)$, respektive $\vec{u}$. $(|\vec{u}|)$

Řešení a): $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-4; r+2)$

$\vec{u} = (-4; r+2) \wedge \vec{u} = (s; -3)$ } Dva vektory jsou si rovny, mají-li stejné souřadnice.

$\boxed{s = -4}$ $r + 2 = -3 \rightarrow \boxed{r = -5}$

$\vec{u} = (-4; -3)$ $(-4; -5+2) = (-4; -3)$

$|\vec{u}| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$, $\boxed{|\vec{u}| = 5}$

Řešení b): $A[2r-3; 6], B[4-r, -3]$

$\vec{u} = (4-r-(2r-3), -9)$

$\vec{u} = (4-r-2r+3; -9)$

$\vec{u} = (7-3r; -9) \quad \wedge \quad \vec{u} = (-5; s)$

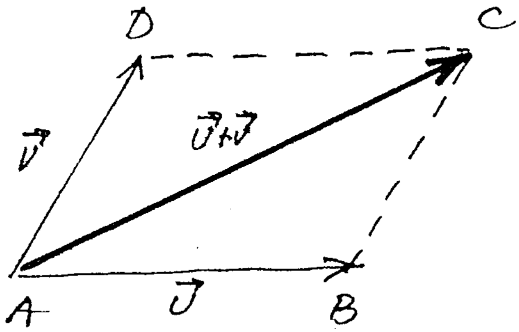
$7-3r = -5$ $\qquad |\vec{u}| = \sqrt{25+81} = \boxed{\sqrt{106}}$

$-3r = -12$

$r = 4 \quad \wedge \quad s = -9 \quad \dots \vec{u}(-5, -9)$

SČÍTÁNÍ VEKTORŮ

Lze provádět algebraicky (početně) nebo graficky.



Součet vektorů $\vec{u} = B-A$, $\vec{v} = D-A$ je vektor $C-A$. Zapisujeme $\vec{u}+\vec{v} = C-A$.

$\boxed{\vec{u}+\vec{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2)}$ v rovině

$\boxed{\vec{u}+\vec{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)}$ v prostoru

Poznámka: Odčítání vektoru $\vec{v}$ od vektoru $\vec{u}$ je přičítání opačného vektoru $-\vec{v}$ k vektoru $\vec{u}$.

Příklad 14: Jsou dány vektory $\vec{u} = (6; -5)$, $\vec{v} = (4; 3)$. Vypočítejte:

a) $\vec{u}+\vec{v}$ b) $\vec{u}-\vec{v}$ c) $\vec{v}-\vec{u}$.

Řešení: a) $\vec{u}+\vec{v} = (6; -5)+(4; 3) = (10; -2)$

b) $\vec{u}-\vec{v} = (6; 5)-(4; 3) = (6; -5)+(-4; -3) = (2; -8)$

c) $\vec{v}-\vec{u} = (4; 3)-(6; -5) = (4; 3)+(-6; +5) = (-2; 8)$

} jsou opačné.

Příklad 15: Jsou dány vektory $\vec{a}=\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$, $\vec{b}(-0{,}8; 1{,}2)$.
Vypočítejte: a) $\vec{a}+\vec{b}$, b) $\vec{a}-\vec{b}$, c) $\vec{b}-\vec{a}$.

Řešení: a) $\vec{a}+\vec{b}=\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)+(-0{,}8; 1{,}2)=(0{,}5; -0{,}75)+(-0{,}8; 1{,}2)=$
$=\underline{\underline{(-0{,}3; 0{,}45)}}$ nebo $\underline{\underline{\left(-\frac{3}{10}; \frac{9}{20}\right)}}$

b) $\vec{a}-\vec{b}=\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)-(-0{,}8; 1{,}2) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)+(0{,}8; -1{,}2)=$

přičteme vektor opačný

$=\underline{\underline{(1{,}3; -1{,}95)}}$ nebo $\underline{\underline{\left(\frac{13}{10}; -\frac{39}{20}\right)}}$

c) $\vec{b}-\vec{a}=(-0{,}8; 1{,}2)-\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)=(-0{,}8; 1{,}2)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)=$
$=\underline{\underline{(-1{,}3; 1{,}95)}}$ nebo $\underline{\underline{\left(-\frac{13}{10}; \frac{39}{20}\right)}}$

Příklad 16: Jsou dány vektory: $\vec{a}=(3;-4)$, $\vec{b}=(-5;2)$, $\vec{c}=(4;-8)$
Vypočítejte: a) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ b) $\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$

Řešení: a) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(3;-4)+(-5;2)+(4;-8)=\boxed{(2;-10)}$

b) $\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}=(4;-8)-(3;-4)-(-5;2)=(4;-8)+(-3;4)+(5;-2)=$
$=\boxed{(6;-6)}$

Příklad 17: Určete souřadnice součtu vektorů a, b, c, je-li
a) $\vec{a}=(5,-7,9)$, $\vec{b}=(-4,10,-3)$, $\vec{c}=(-2,-3,-5)$
b) $\vec{a}=\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\sqrt{2}\right)$, $\vec{b}=\left(1\frac{1}{5}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\vec{c}=\left(-\frac{7}{10}, -1\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Řešení a): $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\underline{\underline{(-1,0,1)}}$

Řešení b): $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(1,-2,-\sqrt{2}+\sqrt{2})=\underline{\underline{(1,-2,0)}}$

Příklad 18: Určete $-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, je-li $\vec{a}=(4,-8,5)$, $\vec{b}=(3,-4,-6)$, $\vec{c}=(-1,10,1)$

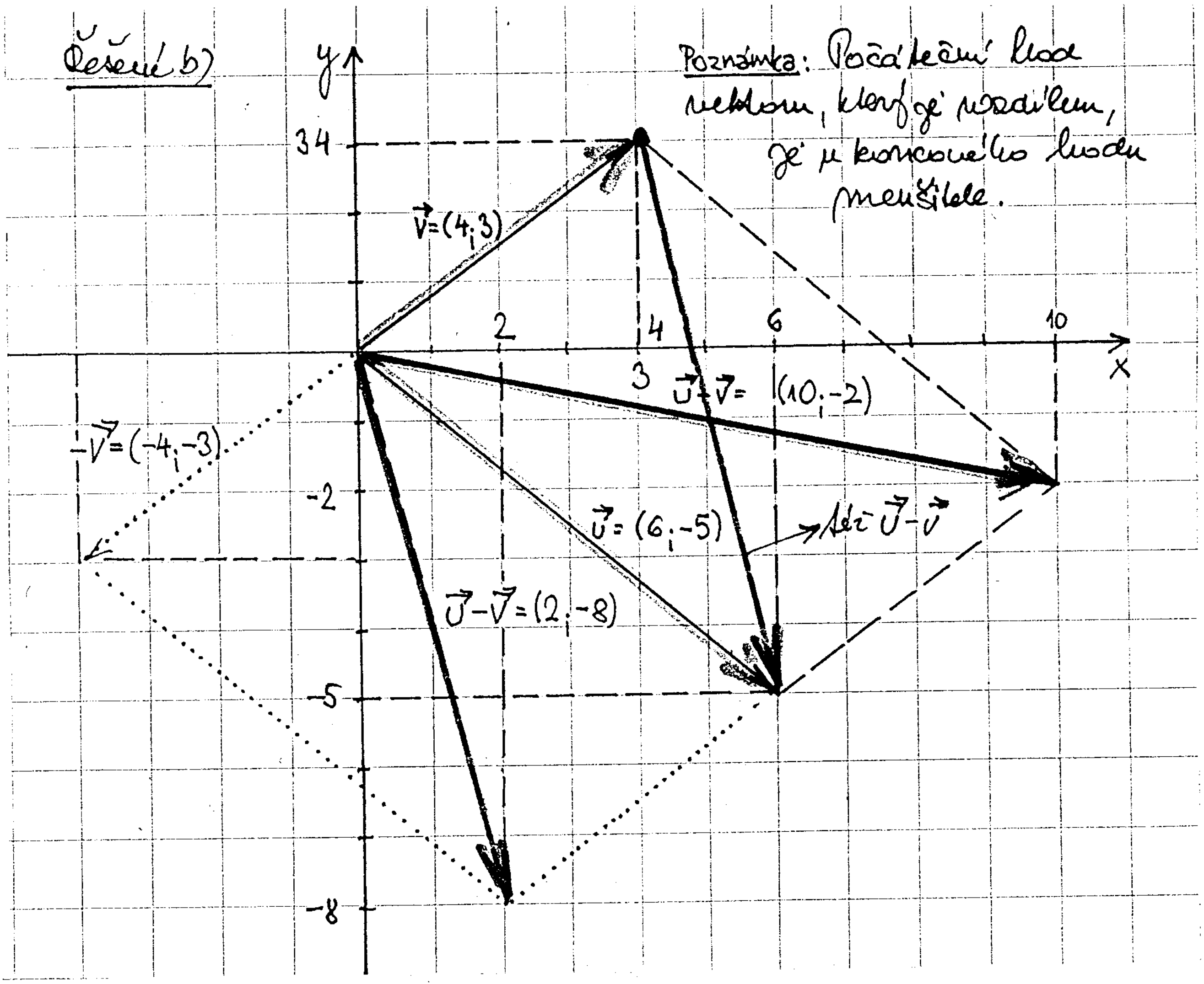
Řešení: $-(4,-8,5)+(3,-4,-6)-(-1,10,1)=(-4,8,-5)+(3,-4,-6)+(1,-10,-1)=\underline{\underline{(0,-6,-12)}}$

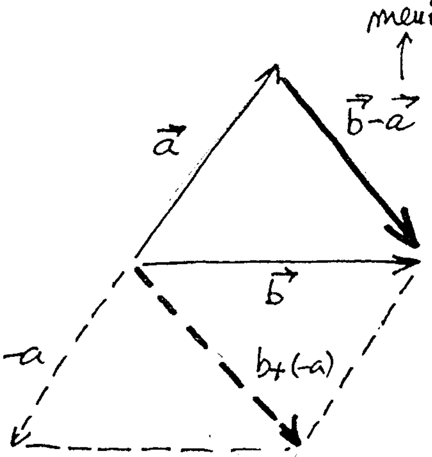
Příklad 18: Jsou dány vektory: $\vec{u}=(6;-5)$, $\vec{v}=(4;3)$. Určete $\vec{u}+\vec{v}$ a $\vec{u}-\vec{v}$ a) výpočtem, b) graficky.

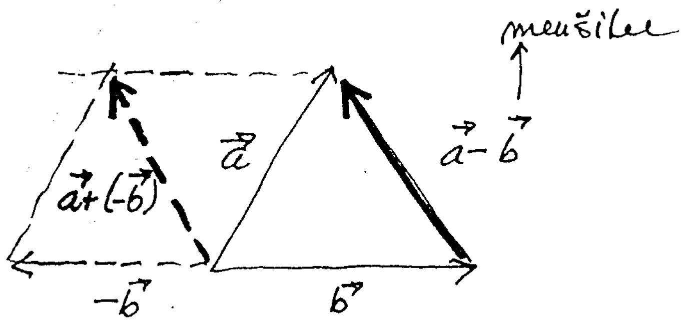
Řešení: a) $\vec{u}+\vec{v}=(6;-5)+(4;3)=\boxed{(10;-2)}$

$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})=(6;-5)+(-4;-3)=\boxed{(2;-8)}$

Řešení b)







K výše uvedené poznámce je uveden tento vysvětlující obrázek.

Příklad 19: Je dán kosodélník ABCD. Vyjádřete pomocí vektorů $\vec{c} = \vec{AC}$, $\vec{d} = \vec{BD}$ (označte $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{BC}$)

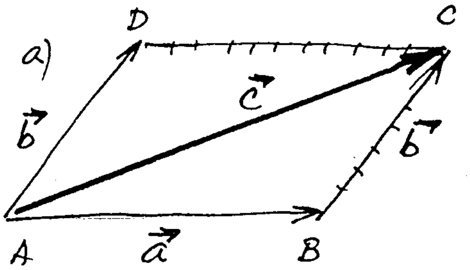
a) součet vektorů $\vec{a}, \vec{b}$

b) součet vektorů $\vec{a}, -\vec{b}$

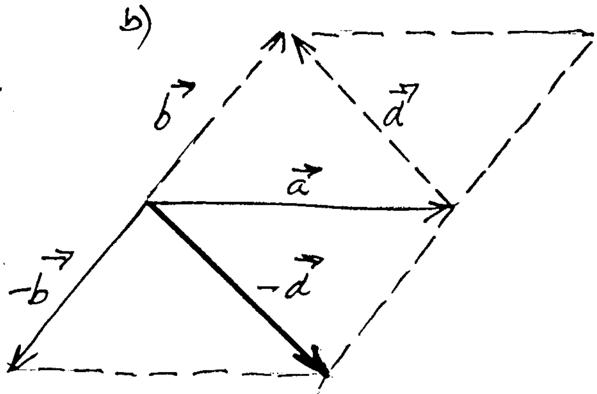
c) součet vektorů $-\vec{a}, -\vec{b}$

d) rozdíl vektorů $-\vec{a}, -\vec{b}$

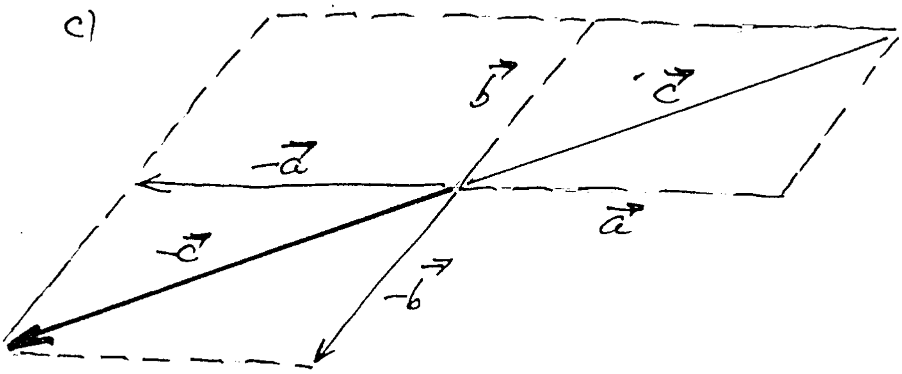
Řešení:



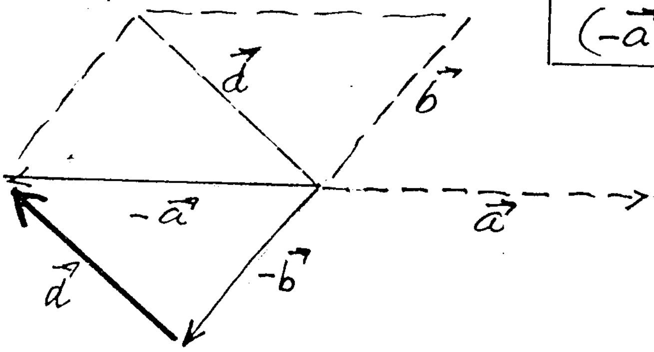
$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}}$



$\boxed{\vec{a} + (-\vec{b}) = -\vec{d}}$



$\boxed{-\vec{a} + (-\vec{b}) = -\vec{c}}$



$\boxed{(-\vec{a}) - (-\vec{b}) = \vec{d}}$

↓

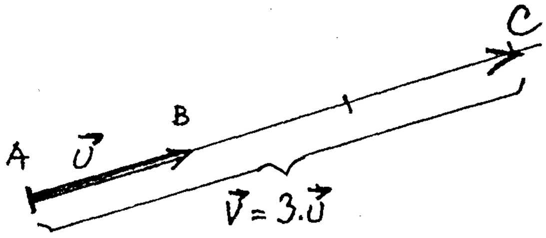
menšitel

NÁSOBENÍ VEKTORU REÁLNÝM ČÍSLEM

Definice 3: Násobek nenulového vektoru $\vec{u} = B - A$ číslem k je vektor $C - A$, přičemž C je bod, pro který platí:

1. $|AC| = |k| \cdot |AB|$

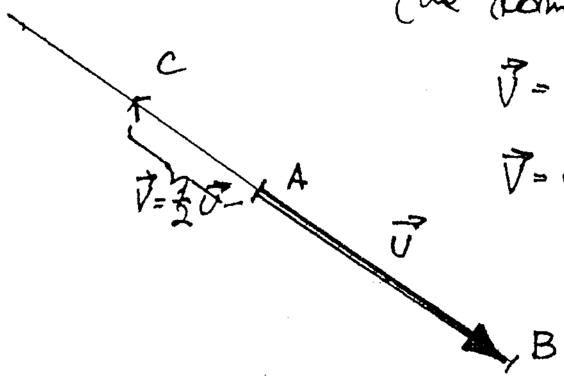
2. Je-li $k \geqq 0$, leží bod C na polopřímce AB, je-li $k < 0$, leží bod C na polopřímce opačné k polopřímce AB. Vektor $C - A$ označujeme $k.\vec{u}$.



Na tomto obrázku platí:

$\vec{v} = 3.\vec{u}$ nebo

$\vec{v} = C - A = 3\vec{u}$, kde $\vec{u} = B - A$



Na tomto obrázku platí.

$\vec{v} = \frac{1}{2} \cdot \vec{u}$ nebo

$\vec{v} = C - A = \frac{1}{2} \cdot \vec{u}$, kde $\vec{u} = B - A$

Příklad 20: Jsou dány vektory a) $\vec{u} = (3, -5)$, $\vec{v} = (-2, 6)$

b) $\vec{u} = (-1, 3, 7)$, $\vec{v} = (2, -6, 12)$

Vypočítejte souřadnice vektorů: 1) $2\vec{u}$, 2) $3\vec{u} + 2\vec{v}$

3) $\frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$

Řešení a):

1a) $2.\vec{u} = 2.(3, -5) = (6, -10)$

2a) $3\vec{u} + 2\vec{v} = 3(3, -5) + 2.(-2, 6) = (9, -15) + (-4, 12) = (5, -3)$

3a) $\frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} = \frac{1}{3}(3, -5) - \frac{1}{2}(-2, 6) = (1, -\frac{5}{3}) + (1, -3) = (2, -\frac{14}{3})$

1b) $2\vec{u} = 2.(-1, 3, 7) = (-2, 6, 14)$

2b) $3\vec{u} + 2\vec{v} = 3(-1, 3, 7) + 2(2, -6, 12) = (-3, 9, 21) + (4, -12, 24) = (1, -3, 45)$

3b) $\frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} = \frac{1}{3}(-1,3,7) - \frac{1}{2}(2,-6,12) = (-\frac{1}{3},1,\frac{7}{3}) + (-1,3,6) =$
$= (-\frac{4}{3}, 4, \frac{25}{3})$

Definice 4: Vektor $\vec{z}$, pro který platí $\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} \dots$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, se nazývá lineární kombinací vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Lineární kombinace jednoho vektoru je jeho násobek.

Příklad 21: Je dáno: $\vec{u} = (2;5)$, $\vec{v} = (3;-6)$, $\vec{w} = (-4;-2)$, $a = 6$, $b = -2$, $c = -5$. Určete lineární kombinaci $\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

Řešení: $a\vec{u} = 6.(2;5) = (12;30)$

$b\vec{v} = -2.(3;-6) = (-6;12)$

$c\vec{w} = -5.(-4;-2) = (20;10)$

$\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = (12;30) + (-6;12) + (20;10) =$
$= (26;52)$ ... $\boxed{\vec{z} = (26;52)}$

Příklad 22: Vypočítejte lineární kombinace $a\vec{u} + b\vec{v}$ a $a\vec{u} - b\vec{v}$ vektorů $\vec{u}, \vec{v}$:

a) $a = 2, b = -1$, $\vec{u} = (1;3)$, $\vec{v} = (-1;7)$,

b) $a = 0, b = 3$; $\vec{u} = (-1;-2)$; $\vec{v} = (1;5)$.

Řešení: a) $a\vec{u} + b\vec{v} = 2\cdot(1;3) + (-1)\cdot(-1;7) = (2;6) + (1;-7) = \boxed{(3;-1)}$

$a\vec{u} - b\vec{v} = 2(1;3) - (-1).(-1;7) = (2;6) - (1;-7) =$
$= (2;6) + (-1;7) = \boxed{(1;13)}$

---

b) $a\vec{u} + b\vec{v} = \underbrace{0.(-1;2)}_{0} + 3.(1;5) = \boxed{(3;15)}$

$a\vec{u} - b\vec{v} = 0 - 3(1;5) = \boxed{(-3;-15)}$

Příklad 23: Určete lineární kombinaci $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$ vektorů $\vec{u}=(1,-2,3)$, $\vec{v}=(6,0,-4)$, $\vec{w}=(-3,2,1)$, je-li $a=3$, $b=\frac{1}{3}$, $c=-\frac{1}{2}$.

Řešení: $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=3\cdot(1,-2,3)+\frac{1}{3}(6,0,-4)-\frac{1}{2}\cdot(-3,2,1)=$

$$=(3,-6,9)+\left(2,0,-\tfrac{4}{3}\right)+\left(\tfrac{3}{2},-1,-\tfrac{1}{2}\right)=\left(6\tfrac{1}{2},-7,\tfrac{71}{6}\right)$$

Výsledkem této lin. kombinace je vektor, např. $\vec{z}=\left(6\frac{1}{2},-7,\frac{71}{6}\right)$.

Příklad 24: Zjistěte, zda vektor $\vec{u}=(3,-1,1)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}=(3,1,0)$, $\vec{b}=(2,2,-1)$.

Řešení: Muselo by platit:

$$\vec{u}=k.\vec{a}+l.\vec{b}$$

$$3=3k+2l$$
$$-1=k+2l$$
$$\underbrace{1=0k-1l}$$
$$\boxed{l=-1}$$

První dvě rovnice řešíme jako soustavu rovnic a pak vypočítáme, zda hodnota l vyhovuje i třetí rovnici.

$$3=3k+2l$$
$$-1=k+2l \quad |\cdot(-3)$$

$$3=3k+2l$$
$$3=-3k-6l$$

$$6=-4l$$

rozpor — $\boxed{l=-\frac{3}{2}}$

Výsledek: Vektor $\vec{u}$ není lin. kombinací vektorů $\vec{a},\vec{b}$.

Příklad 25: Určete čísla a, b tak, aby platilo:

$$3(1+a,-1)+2\cdot(1,6b)=(8,3)$$

Řešení:

$$(3+3a,-3)+(2,12b)=(8,3)$$

$$5+3a=8 \quad \wedge \quad -3+12b=3$$

$$3a=3 \qquad 12b=6$$

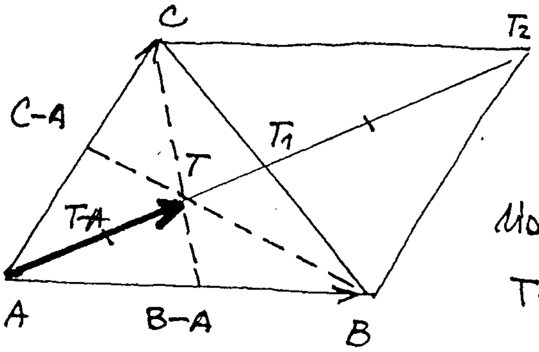
$$\boxed{a=1} \qquad \boxed{b=\tfrac{1}{2}}$$

Zkouška: $3(1+1,-1)+2\cdot\left(1,6\cdot\frac{1}{2}\right)=3(2,-1)+2(1,3)=$

$$=(6,-3)+(2,6)=(8,3)$$

Příklad 26A: T je těžiště $\triangle ABC$. Vyjádřete vektor $T-A$ jako lineární kombinaci vektorů $B-A$ a $C-A$.

Řešení: $\triangle ABC$ doplníme na rovnoběžník ABT_2C.



Potom platí, že vektor

$$T_2-A = \underbrace{(B-A)+(C-A)}_{\text{součet vektorů}}$$

Úsečku AT_2 rozdělíme na 6 dílů.

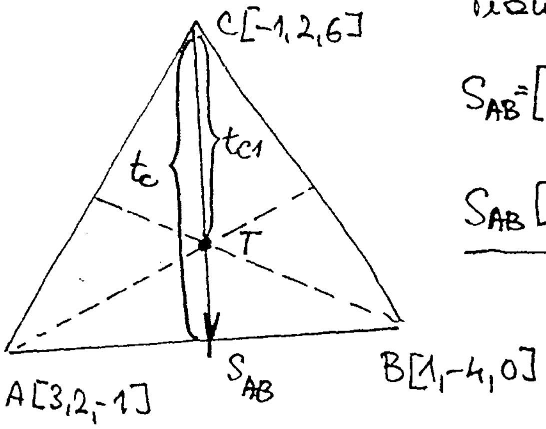
$$T-A = \frac{2}{3}(T_1-A)$$

$$T-A = \frac{1}{3}(T_2-A) = \frac{1}{3}\left[(B-A)+(C-A)\right]$$

$$\boxed{T-A = \frac{1}{3}(B-A) + \frac{1}{3}(C-A)}$$

Příklad 26B: Určete souřadnice těžiště T $\triangle ABC$, je-li $A[3,2,-1]$, $B[1,-4,0]$, $C[-1,2,6]$.

Řešení:



Těžnici t_c považujme za vektor $\vec{t_c}$.

$$S_{AB} = \left[\frac{3+1}{2},\ \frac{2-4}{2},\ \frac{-1+0}{2}\right]$$

$$S_{AB}\left[2,\ -1,\ -\frac{1}{2}\right]$$

$$\vec{t_c} = S_{AB} - C$$

$$\vec{t_c} = (3,-3,-6\tfrac{1}{2}) = (3,-3,-\tfrac{13}{2})$$

$$\vec{t_{c1}} = \frac{2}{3}\vec{t_c} = \frac{2}{3}\left(3,-3,-\frac{13}{2}\right) = \left(2,-2,-\frac{13}{2}\right)$$

Souřadnice těžiště T získáme tak, že k souřadnicím bodu C přičteme souřadnice vektoru $\vec{t_{c1}}$.

$T = C + \vec{t_{c1}}$, $T[-1+2,\ 2-2,\ 6-\frac{13}{3})$, $\boxed{T[1,0,\frac{5}{3}]}$

ROVNOBĚŽNOST VEKTORŮ

Příklad 27: Zjistěte, zda vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou rovnoběžné, je-li a) $\vec{u}=(1,3)$, $\vec{v}=(3,1)$, b) $\vec{u}=(2,-3,4)$, $\vec{v}=(3,-4{,}5,6)$.

Řešení: Vektory jsou rovnoběžné, je-li jeden z nich násobkem druhého. Musí tedy platit:

a) $\exists k \in R: \vec{v}=k.\vec{u} \dots v_1=k.u_1 \wedge v_2=k.u_2$

$3=k.1 \wedge 1=k.3$

$\boxed{k=3} \underset{\text{Rozpor}}{\wedge} \boxed{k=\frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{\vec{u} \nparallel \vec{v}}$

b) $v_1=k.u_1 \wedge v_2=k.u_2 \wedge v_3=k.u_3$

$3=k.2 \wedge -4{,}5=k.(-3) \wedge 6=k.4$

$\boxed{k=1{,}5} \wedge \boxed{k=1{,}5} \wedge \boxed{k=1{,}5} \Rightarrow \boxed{\vec{u} \parallel \vec{v}}$

Příklad 28: Určete v_2 tak, aby vektory $\vec{u}=(4,-2)$, $\vec{v}=(\frac{8}{3}, v_2)$ byly rovnoběžné.

Řešení: $\vec{v}=k.\vec{u}$

$v_1=k.u_1$ $\quad$ $v_2=k.u_2$

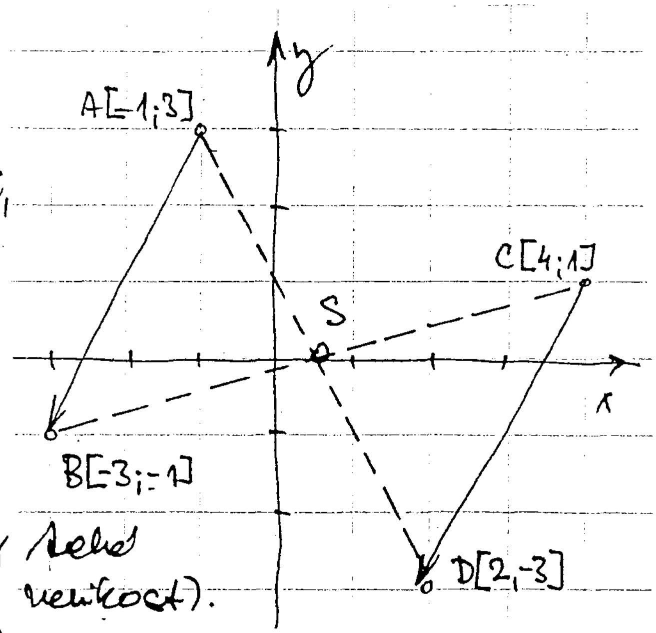
$\frac{8}{3}=k.4$ $\quad$ $v_2=\frac{2}{3}.(-2)$

$k=\frac{2}{3}$ $\quad$ $\boxed{v_2=-\frac{4}{3}}$

Příklad 29: Jsou dány body $A[-1,3]$, $B[-3,-1]$, $C[4,1]$, $D[2,-3]$.

1) Rozhodněte, zda vektory $\vec{u}=B-A$ a $\vec{v}=D-C$ jsou stejné?

2) Jsou také rovnoběžné?



Řešení 1): Oba vektory budou stejné, jestliže úsečky AD a BC mají společný střed.

$S_{AD}\left[\frac{-1+2}{2}; \frac{3-3}{2}\right]=\left[\frac{1}{2};0\right]$ jsou tedy stejné

$S_{BC}\left[\frac{4-3}{2}; \frac{1-1}{2}\right]=\left[\frac{1}{2};0\right]$

2) $\vec{u} \parallel \vec{v}$, stejné vektory jsou vždy také rovnoběžné (mají též stejnou velikost).

<u>Příklad 30</u>: Jsou dány vektory $\vec{u}=(u_1,2,6)$, $\vec{v}=(1,v_2,-2)$. Určete u_1, v_2 tak, aby $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

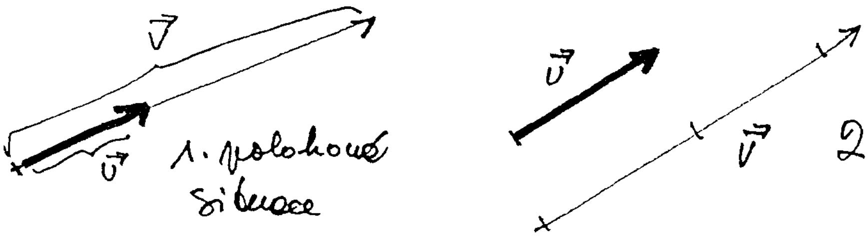
<u>Řešení</u>: Víme, že $\vec{u}=k.\vec{v}$.

$$(u_1,2,6)=k(1,v_2,-2)$$
$$(u_1,2,6)=(k,kv_2,-2k)$$

$-2k=6$, $k=-3$ | $k=u_1$, $\boxed{u_1=-3}$ | $kv_2=2$, $-3v_2=2$, $\boxed{v_2=-\frac{2}{3}}$

<u>VEKTORY LINEÁRNĚ ZÁVISLÉ</u>

Jestliže pro dva vektory $\vec{u}, \vec{v}$ platí, že $\vec{v}=k.\vec{u}$, čili jeden je násobkem druhého, říkáme, že jsou <u>lineárně závislé</u>. Jsou zároveň rovnoběžné. Mohou ležet též na stejné přímce, částečně se mohou i krýt, což považujeme též za rovnoběžnost.



1. polohová situace

2. situace

<u>Příklad 31</u>: Jsou dány vektory

a) $\vec{a}=(-1,3,0)$, $\vec{b}=(-2,5,0)$,

b) $\vec{a}=(-2,4,6)$, $\vec{b}=(-6,12,18)$.

Jsou lineárně závislé (rovnoběžné)?

<u>Řešení a)</u>: $k(-1,3,0)=(-2,5,0)$

$(-k,3k,0k)=(-2,5,0)$

$-k=-2 \wedge 3k=5 \wedge 0k=0$

$\boxed{k=2} \wedge \boxed{k=\frac{5}{3}} \wedge \boxed{k\in R}$ (libovolné)

Takové <u>k</u> neexistuje $\Rightarrow \vec{a} \nparallel \vec{b}$.

<u>Řešení b</u>: $k(-2,4,6)=(-6,12,18)$

$(-2k,4k,6k)=(-6,12,18)$

$-2k=-6 \wedge 4k=12 \wedge 6k=18$

$\boxed{k=3}$ $\boxed{k=3}$ $\boxed{k=3}$

Vektory $\vec{a}, \vec{b}$ jsou rovnoběžné.

SOUČIN VEKTORŮ
- SKALÁRNÍ (výsledkem je číslo)
- VEKTOROVÝ (výsledkem je vektor)

$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2}$ je definice skalárního součinu

Příklad 32: Vypočítejte skalární součin vektorů $\vec{u},\vec{v}$, je-li

a) $\vec{u}=(1;2)$ $\vec{v}=(-1;1)$ b) $\vec{u}=(3;-4)$, $\vec{v}=(-2;1)$

c) $\vec{u}=(1,1,3)$, $\vec{v}=(2,-\frac{1}{2},3)$

Řešení: a) $\vec{u}\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 = -1+2=1$

b) $\vec{u}\vec{v} = -6-4=-10$

c) $\vec{u}\vec{v} = 2-\frac{1}{2}+9 = 10{,}5$

Příklad 33: Určete v_1 tak, aby skalární součin vektorů $\vec{u}=(-2;3)$, $\vec{v}=(v_1,1)$ se rovnal 6.

Řešení: $\vec{u}\vec{v}=6$

$(-2;3).(v_1,1)=6$

$-2v_1+3.1 = 6$

$-2v_1=3$

$\boxed{v_1=-1{,}5}$

Příklad 34: Jsou dány vektory $\vec{a}=(3;-2)$, $\vec{b}=(-1;5)$. Určete vektor $\vec{c}$, pro který platí $\vec{a}.\vec{c}=17$, $\vec{b}.\vec{c}=3$.

Řešení: Označme $\vec{c}=(c_1,c_2)$

$\vec{a}\vec{c}=(3;-2).(c_1;c_2)$ $\vec{b}\vec{c}=(-1;5).(c_1;c_2)$

$\boxed{17=3c_1-2c_2}$ soustava $\boxed{3=-c_1+5c_2}$

$3c_1-2c_2=17$
$-c_1+5c_2=3$ $/.3$

$3c_1-2c_2=17$
$-3c_1+15c_2=9$

$13c_2=26$ $\boxed{c_2=2}$

$3c_1-2.2=17$ $\boxed{c_1=7}$

Výsledek: $\boxed{\vec{c}=(7;2)}$

Příklad 35: Jsou dány body: K[4,3,1], L[-1,1,-1], M[0,3,1] N[3,0,-2]. Určete skal. součin $\vec{a}.\vec{b}$, je-li $\vec{a}=M-N$, $\vec{b}=K-L$.

Řešení:

$\vec{a} = M-N \qquad \vec{b} = K-L \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = -15+6+6 = -3$

$\vec{a} = (-3,3,3) \qquad \vec{b} = (5,2,2) \qquad \boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = -3}$

KOLMOST VEKTORŮ

Věta: Dva vektory jsou navzájem kolmé, právě když jejich skalární součin je roven nule.

Příklad 36: Zjistěte, zda vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou kolmé, je-li

a) $\vec{u} = (6;3)$ $\vec{v} = (4;-8)$

Řešení

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 24-24 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{u} \perp \vec{v}}$

b) $\vec{u} = (-1;3)$, $\vec{v} = (-3;1)$

Řešení:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3+3 = 6$

$\Rightarrow$ nejsou kolmé

c) $A[1;1]$, $B[4;-3]$, $C[7;1]$, $D[1;5]$ jsou vrcholy čtyřúhelníku. Jsou jeho úhlopříčky AC (jako vektor $C-A$), BD (jako vektor $D-A$) navzájem kolmé?

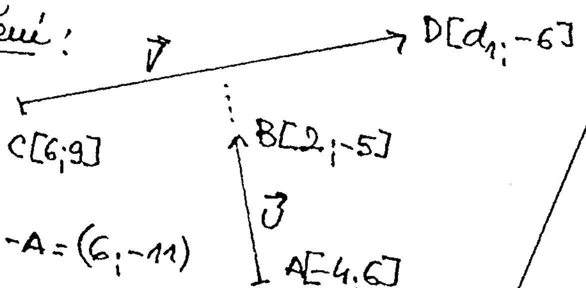
Řešení: Označme $\vec{AC} = \vec{u}$, $\vec{BD} = \vec{v}$. Platí

$\vec{u} = C-A = (6;0)$, $\vec{v} = D-B = (0,8)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (6;0)\cdot(0,8) = 0+0 = 0 \Rightarrow \boxed{AC \perp BD}$

Příklad 37: V rovině jsou dány vektory $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{CD}$, kde $A[-4;6]$, $B[2;-5]$, $C[6;9]$, $D[d_1;-6]$. Určete d_1 tak, aby platilo $\vec{AB} \perp \vec{CD}$.

Řešení:



$\vec{u} = B-A = (6;-11)$

$\vec{v} = D-C = (d_1-6;-15)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

$(6;-11)\cdot(d_1-6;-15) = 0$

$6(d_1-6) + 165 = 0$

$6d_1 - 36 + 165 = 0$

$\boxed{d_1 = -21,5}$

Příklad 38: Určete souřadnici a_2 vektoru $\vec{a}$ tak, aby vektory $\vec{a}, \vec{b}$ byly kolmé, je-li $\vec{a} = (3;a_2)$, $\vec{b} = (-5;6)$.

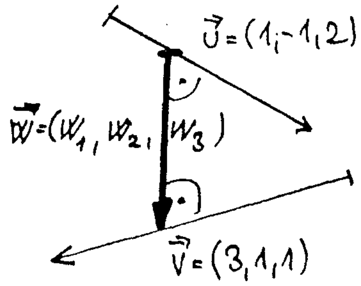
Řešení: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$(3;a_2)\cdot(-5;6)=0 \rightarrow -15+6a_2=0$

$\boxed{a_2=2{,}5}$

Příklad 39: V prostoru určete vektor $\vec{w}$ kolmý k vektorům $\vec{u},\vec{v}$, je-li
$\vec{u}=(1;-1;2), \vec{v}=(3,1,1)$.

Řešení



Platí:

$\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \wedge \vec{v}\cdot\vec{w}=0$

$(1,-1,2)\cdot(w_1,w_2,w_3)=0$

$\wedge (3,1,1)\cdot(w_1,w_2,w_3)=0$

$\vec{w}$

$w_1-w_2+2w_3=0$ (1)

$3w_1+w_2+w_3=0$ (2)

$4w_1+3w_2=0$

$4w_1=-3w_2$

$\boxed{w_1=-\frac{3}{4}w_2}$

Jednu souřadnici zvolím, např.

$\boxed{w_2=4} \Rightarrow \boxed{w_1=-3}$

Dosadím do (1) nebo (2):

$-3-w_2+2\cdot4=0$

$\boxed{w_2=5}$

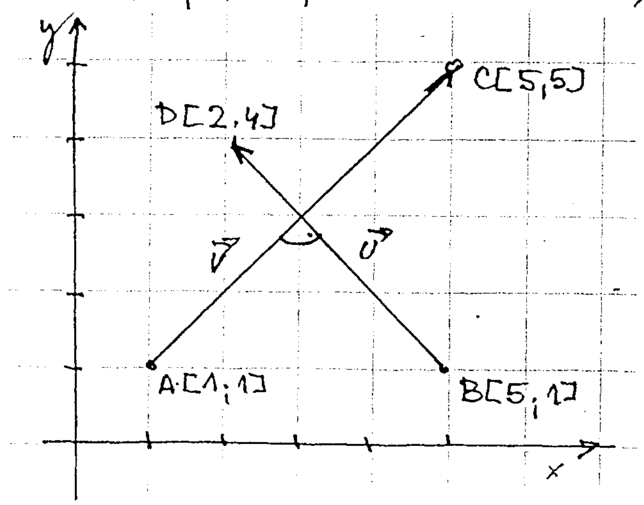
$\boxed{w=(-3,5,4)}$

Příklad 40: Jsou dány body A[1; 1], B[5; 1], C[5; 5], D[2; 4]. Jsou úsečky AC a BD kolmé?

Řešení: Označme $\vec{v}=C-A=(4,4)$, $\vec{u}=D-B=(-3;3)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-3;3)\cdot(4;4)=-12+12=0 \Rightarrow \boxed{AC\perp BD}$

viz obr.



Vektorový součin vektorů v prostoru

Definice: Vektorovým součinem dvou vektorů v prostoru $\vec{u}, \vec{v}$ rozumíme vektor $\vec{w}$, který má tyto vlastnosti:

a) Leží-li $\vec{u}, \vec{v}$ na jedné přímce, pak $\vec{u} \times \vec{v} = o$.

b) Neleží-li $\vec{u}, \vec{v}$ na jedné přímce, pak vektor $\vec{w}$ je kolmý k oběma vektorům $\vec{u}, \vec{v}$ (viz str. 23).

c) $|\vec{w}| = |\vec{u}| . |\vec{v}| . \sin\alpha$, kde α je úhel vektorů $\vec{u}, \vec{v}$.

Příklad 41: Vypočítejte vektorový součin $\vec{w}$ vektorů $\vec{a}, \vec{b}$, je-li:

a) $\vec{a} = (3; 1; 2)$, $\vec{b} = (-1; 1; 0)$

$$\begin{array}{cccc} u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

$\vec{w} = \vec{a} \times \vec{b} = (-2; -2; 4)$

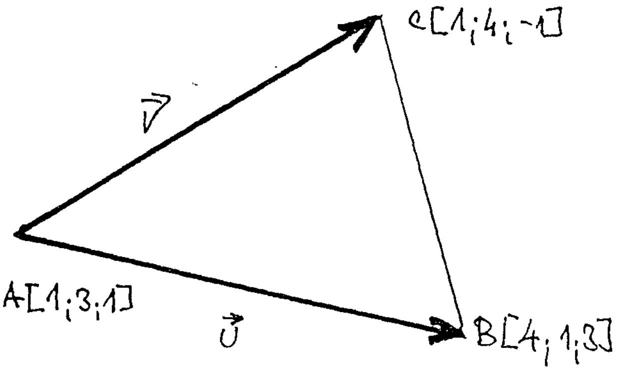
b) $\vec{a} = (2; 1; 1)$, $\vec{b} = (3; 3; 2)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{array}$$

$\vec{w} = \vec{a} . \vec{b} = (2-3; 3-4; 6-3)$

$\vec{w} = (-1; -1; 3)$

Příklad 42: Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC (viz obr.)



$\vec{u} = B - A = (3; -2; 2) = \overrightarrow{AB}$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0; 1; -2)$

$\vec{w} = \vec{u} . \vec{v} = (4-2; 0+6; 3+0) = (2; 6; 3)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2; 6; 3)$

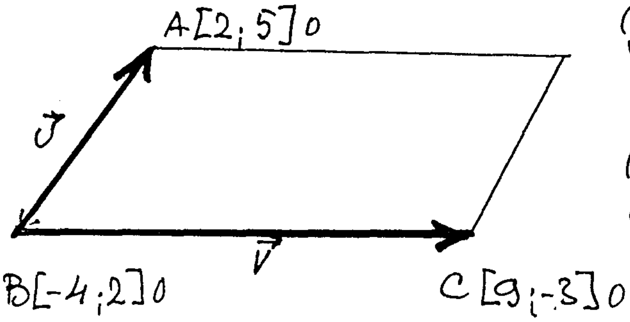
$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+36+9} = \sqrt{49} = 7$

$$\begin{array}{cccc} -2 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}$$

$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 7 = \frac{7}{2} = 3{,}5$

Trojúhelník má obsah 3,5 čtverečných jednotek.

Příklad 43: Vypočítejte obsah rovnoběžníku ABCD (viz obr.).



Jestliže jsou zadány vrcholy v rovině, tak je třetí souřadnice nulová, tedy A[2;5;0], B[-4;2;0] C[9;-3;0].

$\vec{u} = \overrightarrow{BA} = A-B = (6;3;0)$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC} = C-B = (13;-5;0)$

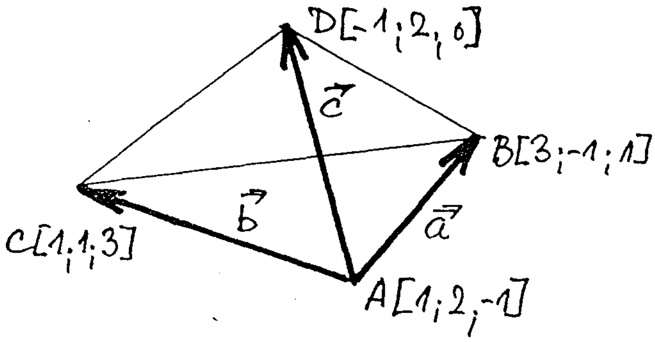
$\vec{w} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \vec{u} \cdot \vec{v} = (0;0;-30-39) = (0;0;-69)$

3	0	6	3
-5	0	13	-5

$S = |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{0+0+4761} = 69$

Rovnoběžník má obsah 69 čtv. jednotek.

Příklad 44: Vypočítejte objem čtyřstěnu (viz obr.).



$\vec{a} = (2;-3;2)$

$\vec{b} = (0;-1;4)$

$\vec{c} = (-2;0;1)$

$\vec{a} \times \vec{b} = (-10;-8;-2)$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot c =$

$(-10;-8;-2) \cdot (-2;0;1) =$

$= 20+0-2 = 18$

-3	2	2	-3
-1	4	0	-1

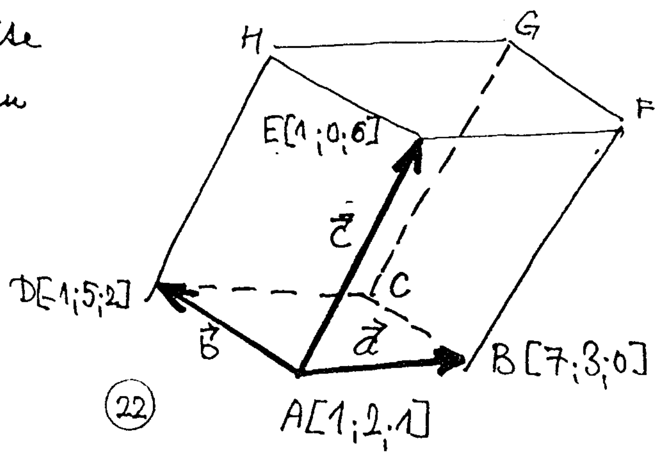
$V = \frac{1}{6} [\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\text{vektorový součin}} \cdot \vec{c}]$

smíšený součin { vektorový součin, skalární součin

$V = \frac{1}{6} [(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}] = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3$

Čtyřstěn má objem 3 jednotky krychlové.

Příklad 45: Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu ABCDEFGH (údaje jsou na obrázku).



$\vec{a} = (6, 1, -1)$

$\vec{b} = (-2, 3, 1)$

$\vec{c} = (0, -2, 5)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{array}$$

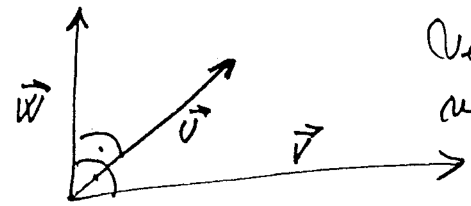
$\vec{a} \times \vec{b} = (4, -4, 20)$

$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (4, -4, 20) \cdot (0, -2, 5) = 0 + 8 + 100 = 108$

<u>Objem rovnoběžnostěnu je 108 krychlových jednotek.</u>

<u>Poznámka</u>: Objem jehlanu tvoří $\frac{1}{3}$ objemu rovnoběžnostěnu.

$V_j = \frac{1}{3} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$



Vektor $\vec{w}$ je v podstatě normálový vektor roviny určené vektory $\vec{u}, \vec{v}$.