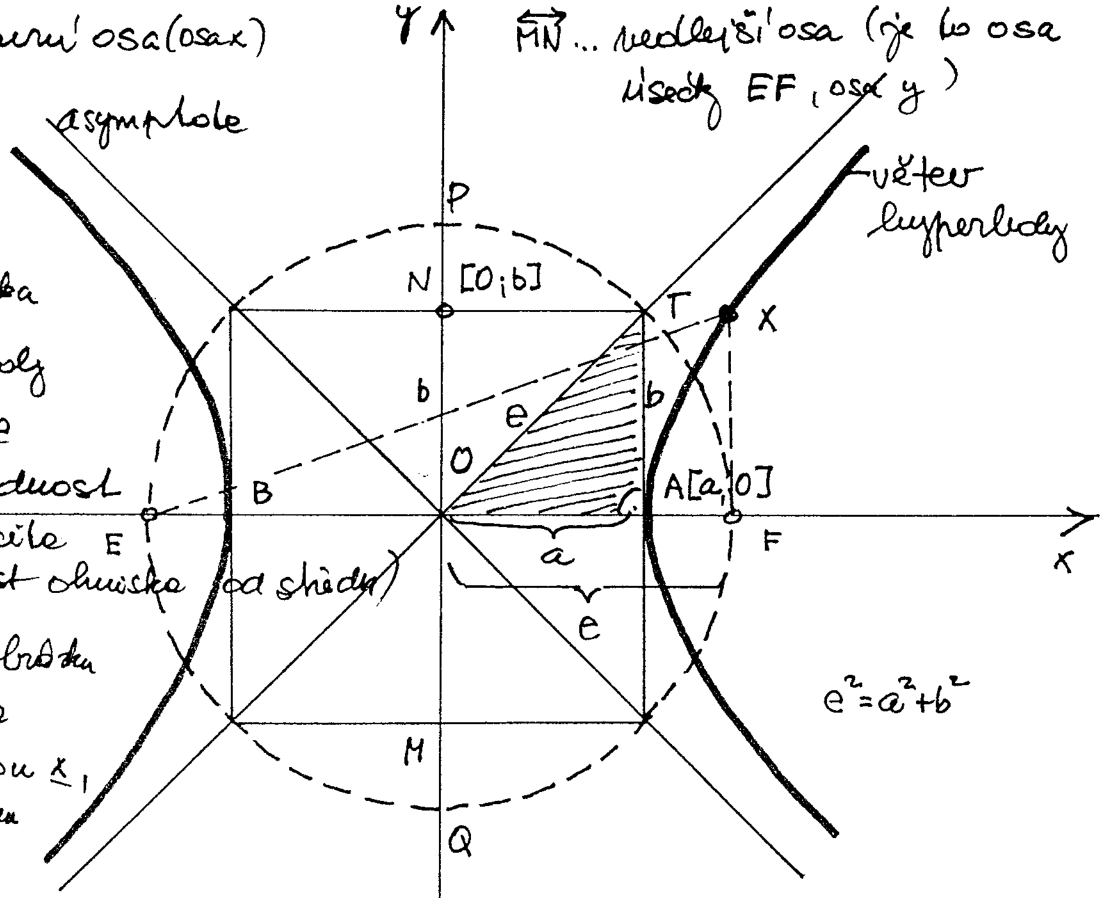
27 a) HYPERBOLA V ANALYTICKÉ GEOMETRII

$|OA| = a$ ... hlavní poloosa (délka) $|ON| = b$ ... vedlejší poloosa (délka)

$\overleftrightarrow{EF}$ hlavní osa (osa x) $\overleftrightarrow{MN}$ ... vedlejší osa (je to osa úsečky EF, osa y)



E,F...ohniska

A,B...vrcholy

$|OE| = |OF| = e$

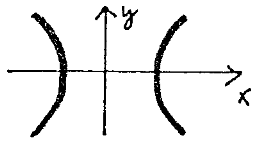
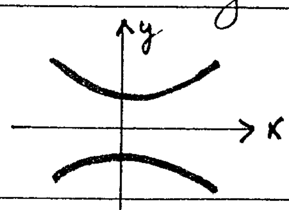
OE... výstřednost = excentricita (je vzdálenost ohniska od středu)

Na tomto obrázku je hyperbola s hlavní osou x, jejím středem O[0;0].

$$e^2 = a^2 + b^2$$

Definice: V rovině jsou dány dva různé body E, F. Množina všech bodů X roviny, pro které se $|XE| - |XF|$ rovná danému kladnému číslu, které je menší než $|EF|$, se nazývá hyperbola. Body E,F se nazývají její ohniska.

Pro hyperboly se středem O[0;0] platí

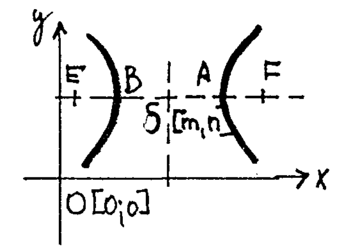
s hlavní osou x		s hlavní osou y
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 	OSOVÉ ROVNICE H.	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 
Rovnice jejich asymptot		Rovnice jejich asymptot
$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$; $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ $\Big\} y = \pm\frac{b}{a}x$ (směrnice)		$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$; $y = -\frac{b}{a}x$, $y = \frac{b}{a}x$ $\Big\} y = \pm\frac{b}{a}x$

Rovnice tečny hyperboly $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ v jejím bodě $X[x_0, y_0]$ je $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ | a hyp.: $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ je $\frac{y_0y}{b^2}-\frac{x_0x}{a^2}=1$.

Rovnice přímek, které prochází bodem $X[x_0, y_0]$ a které jsou rovnoběžné s asymptotami jsou:

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b} \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}$$

Pro hyperboly s posunutým středem $S[m;n]$ platí:



$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

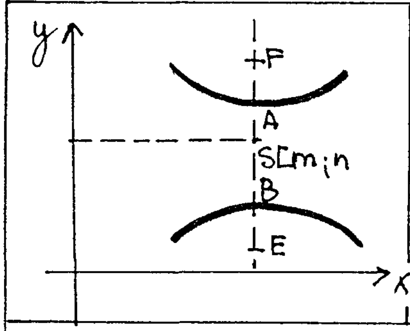
Tečna

$$\frac{(x_0-m)\cdot(x-m)}{a^2}-\frac{(y_0-n)\cdot(y-n)}{b^2}=1$$

$A[m+a;n]$
$B[m-a;n]$
$E[m-e;n]$
$F[m+e;n]$

Asymptoty:

$$\frac{x-m}{a}=\pm\frac{y-n}{b}$$



$$\frac{(y-n)^2}{b^2}-\frac{(x-m)^2}{a^2}=1$$

Tečna

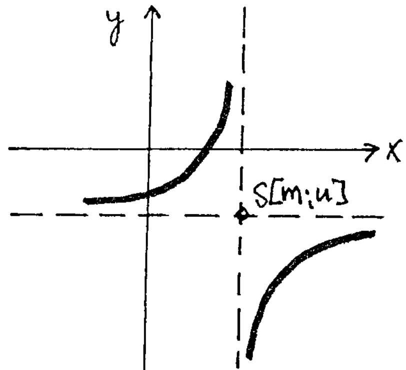
$$\frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2}-\frac{(x_0-m)\cdot(x-m)}{a^2}=1$$

$A[m;n+a]$
$B[m;n-a]$
$E[m;n-e]$
$F[m;n+e]$

asymptoty:

$$\frac{x-m}{a}=\pm\frac{y-n}{b}$$

Rovnice rovnoosé hyperboly: $\boxed{(x-m).(y-n)=k, \text{ kde } k=xy}$



Její asymptoty jsou:

$\boxed{x=m}$, $\boxed{y=n}$

Tato hyperbola má tečnu:

$$\boxed{(x_0-m)\cdot(y-n)+(y_0-n)\cdot(x-m)=2k}$$

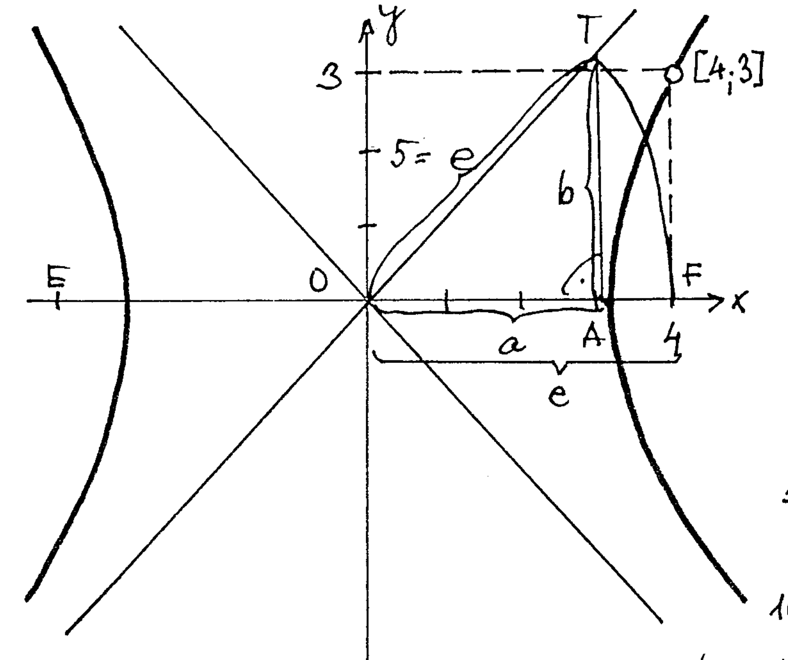
Přímky rovnoběžné s asymptotami v bodě hyperboly $X[x_0, y_0]$ mají rovnice:

$$\boxed{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}} \qquad \boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}}$$

Příklad 1 (3.1186 uč.): Osy hyperboly jsou totožné s osami soustavy souřadnic, $e = 5$. Hyperbola prochází bodem $[4;3]$. Napište její rovnici a rovnici jejích asymptot.

Řešení: Rozlišíme dva případy a), b)

Případ a) Osa $\underline{x}$ je hlavní osa, osa y vedlejší osa h.



$$e^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 + b^2 = 25$$

$b^2 = 25 - a^2$, do rovnice hyp.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{4^2}{a^2} - \frac{3^2}{25 - a^2} = 1$$

$$\frac{16}{a^2} - \frac{9}{25 - a^2} = 1 \quad | \cdot a^2(25 - a^2)$$

$$16(25 - a^2) - 9a^2 = a^2(25 - a^2)$$

$$400 - 16a^2 - 9a^2 = 25a^2 - a^4$$

$$a^4 - 50a^2 + 400 = 0 \quad (\text{sub. } c = a^2$$

$$c^2 - 50c + 400 = 0$$

$$c_{1,2} = \frac{50 \pm \sqrt{900}}{2} = \frac{50 \pm 30}{2} = \begin{cases} c_1 = 40 \\ c_2 = 10 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 40 \\ a = \sqrt{40} \end{array}\right\} b^2 = 25 - 40 = -15 \text{ nevyhovuje}$$

$a^2 = 10 \ldots\ b^2 = 25 - 10 = 15 \ldots$ | $a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{15}$

$\boxed{\dfrac{x^2}{10} - \dfrac{y^2}{15} = 1}$ je rovnice hyperboly

Asymptoty: $y = \pm \dfrac{b}{a} x$

$$y = \pm \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{10}} x$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{15}{10}}\, x$$

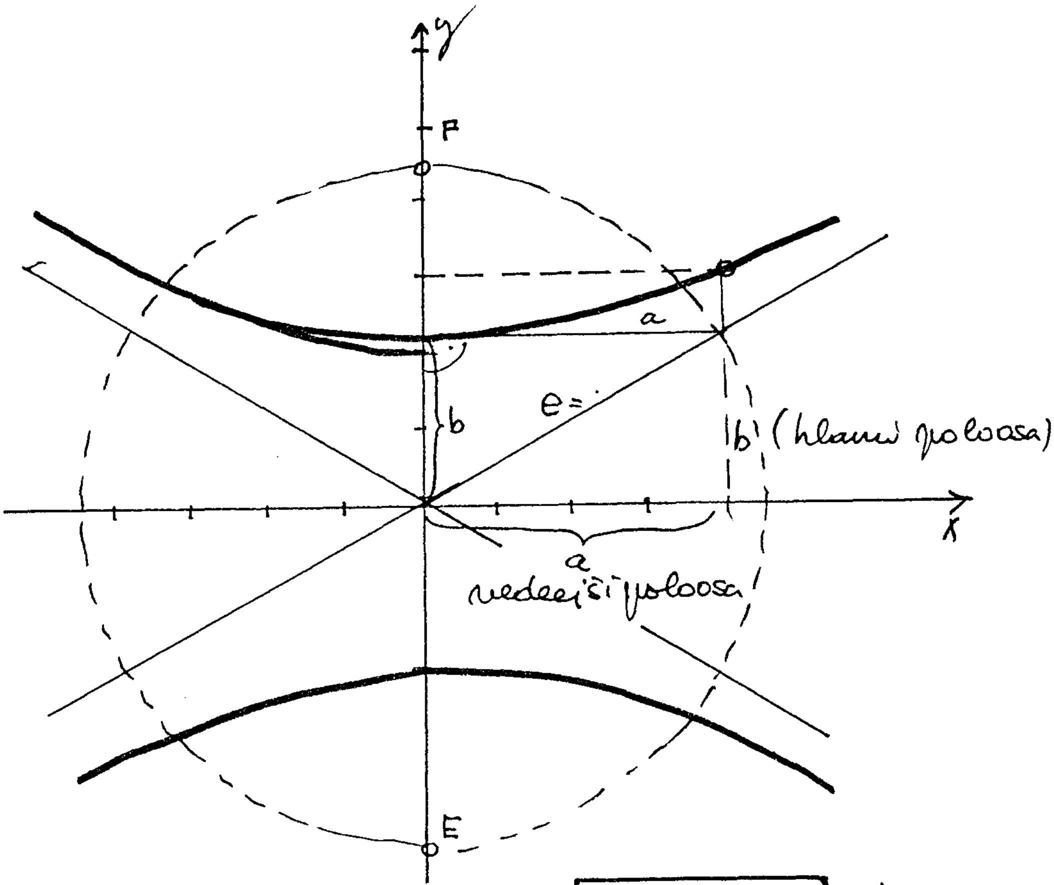
$\boxed{y = \pm \sqrt{\dfrac{3}{2}}\, x}$ jsou rovnice asymptot

Výsledek v učebnici: je směrnice $\frac{1}{2}\sqrt{6}$, což má stejnou hodnotu jako $\sqrt{\frac{3}{2}}$, neboť $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$

Případ b) Osa y je hlavní osa, osa x vedlejší osa h. (viz obr. násl. 4).

$b^2 = 25 - a^2$ dosadíme do $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$

$$\frac{9}{25 - a^2} - \frac{16}{a^2} = 1 \quad | \cdot a^2(25 - a^2)$$



$9a^2-16(25-a^2)=a^2(25-a^2)$

$9a^2-400+16a^2=25a^2-a^4$

$a^4=400$, subst. $a^2=c$

$c^2=400 \Rightarrow \begin{cases} c_1=20 \\ c_2=-20 \end{cases}$

$a^2=20$, $a=\sqrt{20}$

$b^2=25-20=5$, $b=\sqrt{5}$

$a^2=-20$ nemá v R řešení

$$\boxed{\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{20}=1}$$ je rovnice hyperboly.

Asymptoty: $y=\pm\frac{b}{a}x$

$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}x$

$y=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}\,x$

$$\boxed{y=\pm\frac{1}{2}x}$$ jsou rovnice asymptot

Příklad 2: Určete délku hlavní a vedlejší poloosy hyperboly dané rovnicí $9x^2-16y^2=144$

$9x^2-16y^2=144 \quad | \cdot \frac{1}{144}$

$\frac{9x^2}{144}-\frac{16y^2}{144}=1$

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

$a^2=16$ $\quad$ $b^2=9$

$\boxed{a=4}$ $\quad$ $\boxed{b=3}$

Příklad 3: Napište osovou rovnici hyperboly, je-li vzdálenost jejích vrcholů A,B rovna 12cm a jejích ohnisek E,F rovno 14cm.

$2a = |AB| = 12\,cm$

$a = 6\,cm$

$a^2 = 36$

$e = \frac{|EF|}{2} = \frac{14}{2} = 7\ (cm)$

$e = 7$

$b = \sqrt{e^2 - a^2}$

$b = \sqrt{49 - 36}$

$b = \sqrt{13} \rightarrow b^2 = 13$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\boxed{\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{13} = 1}$

Příklad 4: Určete $|AB|$ a $|EF|$ hyperboly $x^2 - 4y^2 = 144$.

$x^2 - 4y^2 = 144 \quad | \cdot \frac{1}{144}$

$\frac{x^2}{144} - \frac{4y^2}{144} = 1$

$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{36} = 1$

$\rightarrow a^2 = 144$

$a = 12$

$2a = 24$

$\boxed{|AB| = 24}$

$b^2 = 36$

$b = 6$

$e = \sqrt{a^2 + b^2}$

$e = \sqrt{144 + 36}$

$e = \sqrt{180} = \sqrt{36 \cdot 5} = 6 \cdot \sqrt{5}$

$2e = |EF| = 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{5} \ldots \boxed{|EF| = 12\sqrt{5}}$

Příklad 5: Napište osovou rovnici hyperboly, která prochází bodem $P[5;2]$ a je-li délka její hlavní poloosy $a = 3$. (hlavní osa je x)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{5^2}{9} - \frac{2^2}{b^2} = 1$

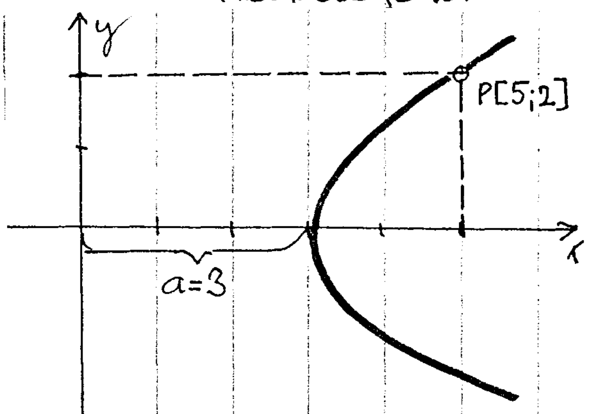
$\frac{25}{9} - \frac{4}{b^2} = 1$

$\rightarrow \frac{4}{b^2} = \frac{16}{9}$

$16b^2 = 36$

$b^2 = \frac{9}{4} (= 2{,}25)$

$\boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{2{,}25} = 1}$



Příklad 6 (4/189-mč.) Určete souřadnice středu, vrcholů a ohnisek hyperboly $3x^2 - y^2 - 24x + 6y + 36 = 0$. Napište rovnice asymptot a narýsujte graf včetně požadovaných bodů S, A, B, E, F.

$3x^2 - y^2 - 24x + 6y + 36 = 0$

$3x^2 - 24x - y^2 + 6y + 36 = 0$

$3(x^2 - 8x) - (y^2 - 6y) + 36 = 0$

$\rightarrow 3(\underline{x^2 - 8x + 16} - 16) - (\underline{y^2 - 6y + 9} - 9) = -36$

$3[(x-4)^2 - 16] - (y-3)^2 + 9 = -36$

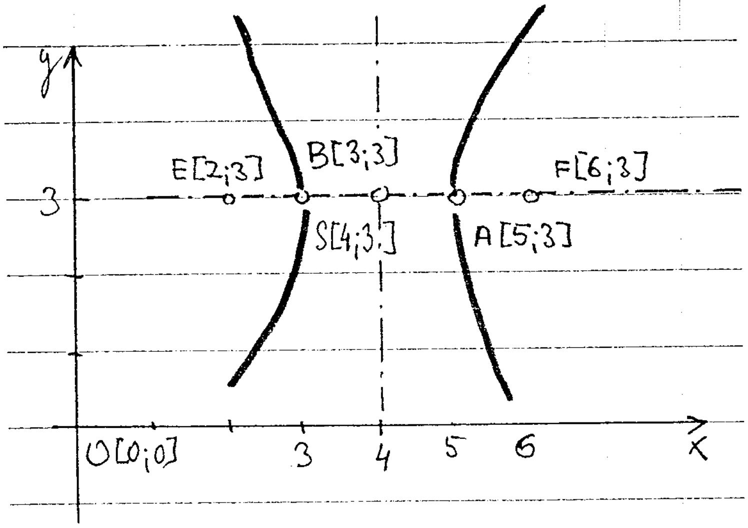
$3(x-4)^2 - 48 - (y-3)^2 + 9 = -36$

$3(x-4)^2-(y-3)^2=3 \quad | \cdot \frac{1}{3}$

$\frac{(x-4)^2}{1}-\frac{(y-3)^2}{3}=1$

$S[4;3] \quad \boxed{a^2=1} \quad \boxed{b^2=3}$

$e=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+3}=2 \;\ldots\; \boxed{e=2}$



	$S[4;3]$
$A[m+a;n]$ ..	$A[5;3]$
$B[m-a;n]$ ..	$B[3;3]$
$E[m-e;n]$ ..	$E[2;3]$
$F[m+e;n]$ ..	$F[6;3]$

Asymptoty:

$\frac{x-m}{a}=\pm\frac{y-n}{b}$

$\frac{x-4}{1}=\pm\frac{y-3}{\sqrt{3}} \quad | \cdot 1 \cdot \sqrt{3}$

$y-3=\pm\sqrt{3}\cdot(x-4)$

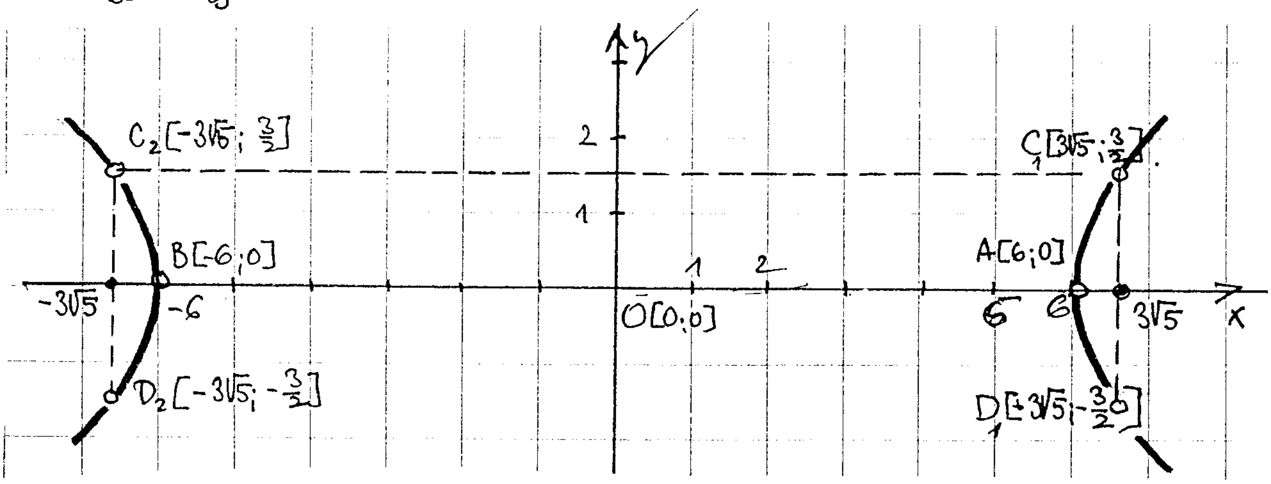
$\boxed{y=\pm\sqrt{3}(x-4)+3}$

Príklad 7: Určte chýbajúce súradnice bodov $A[6;y]$, $B[-6;y]$, $C[x;\frac{3}{2}]$, $D[x;-\frac{3}{2}]$ tak, aby tieto body ležali na hyperbole, ktorá má rovnicu: $9x^2-36y^2=324$.

Nájdime si náčrt obrázok (ale nemusíme).

$9x^2-36y^2=324 \quad | \cdot \frac{1}{324}$

$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow a=6,\ b=3$



Výpočet je na ďalšej strane.

A[6; y]

$9x^2-36y^2=324$

$9\cdot 6^2-36y^2-324=0$

$324-36y^2-324=0$

$36y^2=0$

$y=0$

A[6; 0]

B[−6; y]

$9\cdot(-6)^2-36y^2-324=0$

⋮

Obdobně

$y=0$

B[−6; 0]

C[x; 3/2]

$9x^2-36\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2-324=0$

$9x^2-81-324=0$

$9x^2=405 \;|:9$

$x^2=45$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{45}$

$x_{1,2}=\pm 3\sqrt{5}$

$C_1[3\sqrt{5}; \frac{3}{2}]$

$C_2[-3\sqrt{5}; \frac{3}{2}]$

D[x; −3/2]

Obdobně

$D_1[3\sqrt{5}; -\frac{3}{2}]$

$D_2[-3\sqrt{5}; -\frac{3}{2}]$

Příklad 8: (5.97/58 S6):

Určete rovnice asymptot hyperboly $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$

$\Rightarrow a=6,\ b=5$ ...asymptoty: $y=\pm\frac{b}{a}x$ ... $\boxed{y=\pm\frac{5}{6}x}$

Příklad 9 (5.98/58 S6): Napište rovnici hyperboly, jejíž asymptoty mají rovnice $3x+2y=0$, $3x-2y=0$ a která prochází bodem $M[3; \frac{3\sqrt{5}}{2}]$.

$3x+2y=0$

$2y=-3x$

$y=-\frac{3}{2}x$

$3x-2y=0$

⋮

$y=\frac{3}{2}x$

$k=\frac{b}{a}$ $\Rightarrow b=3,\ a=2$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1 \;|\cdot 36$

$\boxed{9x^2-4y^2=36}$

Ověříme, zda prochází bodem M:

$L=9\cdot 9-4\cdot\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2=81-\frac{4\cdot 9\cdot 5}{4}=81-45=36$, $P=36$, $L=P$ ... ano

---

Příklad 10 (5.100/58 S6): Určete souřadnice ohnisek, excentricitu a rovnice asymptot hyperboly dané rovnicí:

a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

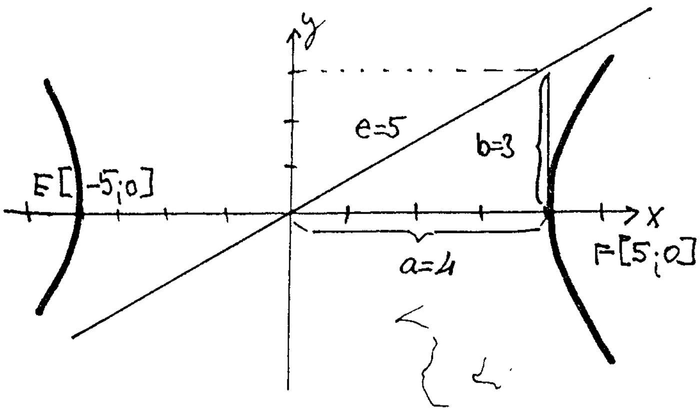
$a^2=16,\ b^2=9$

$a=4,\ b=3$

$e=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=5$

$y=\pm\frac{b}{a}x$ ... $\boxed{y=\pm\frac{3}{4}x}$

$\boxed{E[-5;0],\ F[5;0],\ e=5}$



b) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}$ ... $a=2,\ b=\sqrt{3}$ ... $e=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$ $\boxed{e=\sqrt{7}}$

$\boxed{E[-\sqrt{7};0],\ F[\sqrt{7};0]}$ ... $y=\pm\frac{b}{a}$ ... $\boxed{y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x}$

Příklad 11 (5.104/59-Sb): Hyperbola má asymptoty dané rovnicemi $y-3=2(x+1)$, $y-3=-2(x+1)$ a prochází bodem $K[4;9]$. Určete rovnici hyperboly.

$y-3=2(x+1)$ $\quad$ $y-3=-2(x+1)$

$y-3=2x+2$ $\quad$ $y-3=-2x-2$

$\boxed{y=2x+5}$ $\quad$ $\boxed{y=-2x+1}$

V porovnání s příkladem 9 nebude průsečík asymptot procházet bodem $O[0;0]$.

Střed hyperboly určíme jako průsečík jejích asymptot.

$y=y$

$2x+5=-2x+1$

$4x=-4$

$x=-1$

$y=2\cdot(-1)+5$

$y=3$

$S[-1;3],\ K[4;9]$

$\quad m\ \ n \qquad x\ \ y$

směrnice $k=2$ ... $k=\frac{b}{a}$ $\quad$ směrnice $k=-2$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} a=\frac{b}{2} \\ a=\frac{b}{-2} \end{array}\right\}$ (1)

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

$$\boxed{\frac{(x+1)^2}{a^2}-\frac{(9-3)^2}{b^2}=1} \quad (2)$$

$$\frac{25}{a^2}-\frac{36}{b^2}=1 \quad |\cdot a^2b^2$$

$$\boxed{25b^2-36a^2=a^2b^2} \quad (3)$$

(1) do (3)

$$25b^2-36\left(\pm\frac{b}{2}\right)^2=\left(\pm\frac{b}{2}\right)^2\cdot b^2$$

$$25b^2-36\cdot\frac{b^2}{4}=\frac{b^2}{4}\cdot b^2$$

$$25b^2-9b^2=\frac{b^2}{4}\cdot b^2 \quad \Big|\cdot\frac{1}{b^2}$$

$$16b^2=\frac{b^4}{4}$$

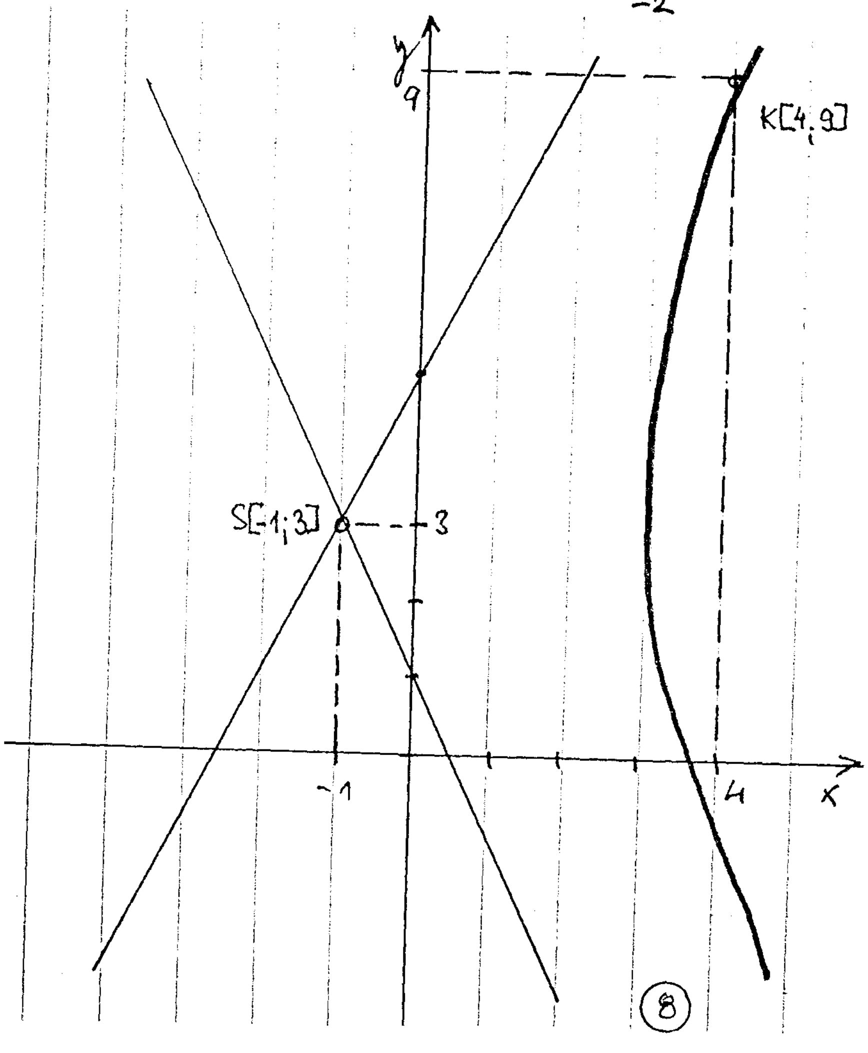
$$16=\frac{b^2}{4} \ \ldots \ \boxed{b^2=64}$$

$$\boxed{b=8}$$

$$a=\frac{b}{2}=\frac{8}{2} \ \ldots \ \boxed{a=4}$$

$$\boxed{a^2=16}$$

do (2)



$$\boxed{\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{64} = 1} \quad 1\cdot 64 \quad \boxed{4(x+1)^2 - (y-3)^2 = 64}$$

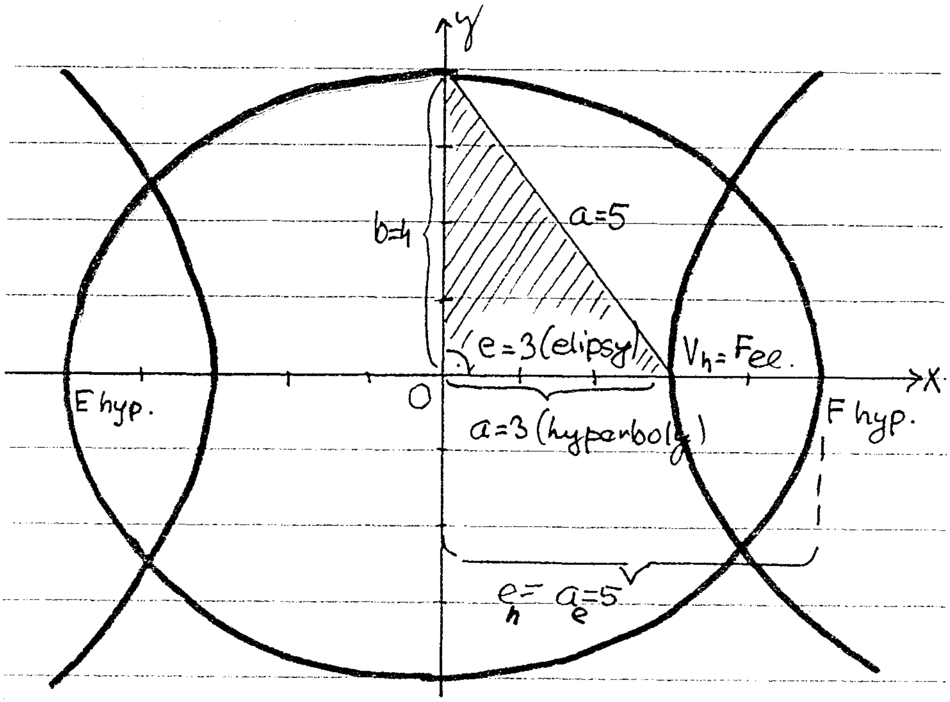
Příklad 12 (5.99 /58 Sb): Napište rovnici hyperboly, jejíž vrcholy jsou současně ohnisky elipsy dané rovnicí $16x^2+25y^2=400$ a jejíž ohniska jsou hlavní vrcholy elipsy.

OF je hlavní poloosa elipsy a zároveň excentricita hyperboly, čili

a elipsy = e hyperboly

a elipsy = 5

e hyperboly = 5



excentricita elipsy je zároveň hlavní poloosa hyperboly } e elipsy = 3

e elipsy = a hyperboly } a hyperboly = 3

Podle obr. (3) platí:

$e^2 = a^2 + b^2$

$b^2 = e^2 - a^2$

$b^2 = 25 - 9 = 16$

Pro hyperbolu platí: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1} \quad 1\cdot 44$$

$$\boxed{16x^2 - 9y^2 = 144}$$

$b^2 = 16$

Příklad 13 (5.101b /58 Sb): Najděte souřadnice středu, vrcholů a ohnisek hyperboly dané rovnicí $25x^2 - 16y^2 - 150x + 224y - 959 = 0$

$25x^2 - 150x - 16y^2 + 224y = 959$

$25(x^2 - 6x) - 16(y^2 - 14y) = 959$

$25(\underline{x^2 - 6x + 9} - 9) - 16(\underline{y^2 - 14y + 49} - 49) = 959$

$$25[(x-3)^2-9]-16[(y-7)^2-49]=959$$

$$25(x-3)^2-225-16(y-7)^2+784=959$$

$$25(x-3)^2-16(y-7)^2=400 \quad \Big| \cdot \frac{1}{400}$$

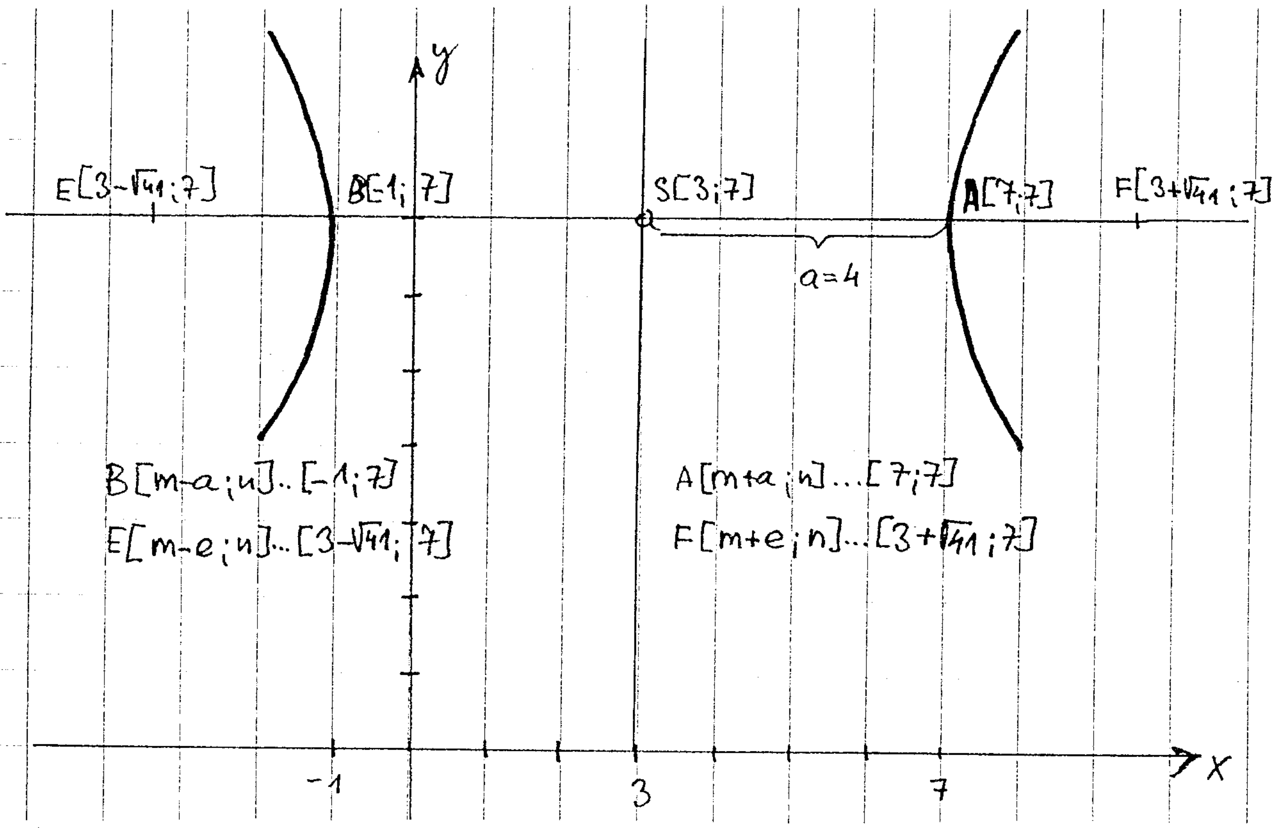
$$\boxed{\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y-7)^2}{25}=1}$$

$$\boxed{S[3;7]} \quad (m\ n)$$

$$a^2=16 \Rightarrow \boxed{a=4}$$

$$b^2=25 \Rightarrow \boxed{b=5}$$

$$e=\sqrt{16+25}=\sqrt{41} \quad \boxed{e=\sqrt{41}}$$



Příklad 14 (vlastní): Vypočítejte délku tětivy, kterou na hyperbole $8x^2-18y^2=144$ vytíná přímka p rovnice $x=5$. Načrtněte příslušný obrázek.

$$8x^2-18y^2=144 \quad \Big| \cdot \frac{1}{144}$$

$$\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{8}=1$$

$$a=\sqrt{18}=3.\sqrt{2}$$

$$b=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Hľadáme súradnice bodů M, N.

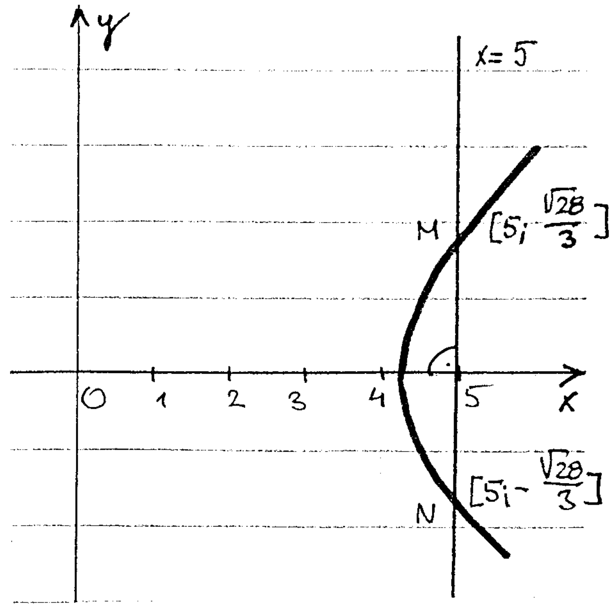
$$8.5^2-18y^2=144$$

$$18y^2=56$$

$$y^2=\frac{28}{9}, \quad y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{28}{9}}= \frac{\sqrt{28}}{3} \ / \ -\frac{\sqrt{28}}{3}$$

$$|MN|=2\cdot\frac{\sqrt{28}}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{28}\doteq 3{,}5$$

$$\boxed{|MN|\doteq 3{,}5}$$



Příklad 15: Hyperbola je dána rovnicí $2x^2-9y^2-36=0$.
Určete: a) Rovnice tečen hyperboly v bodech $T_1[6;y_1]$, $T_2[6;y_2]$.
b) Rovnice asymptot této hyperboly.
c) Rovnice přímek, které jsou rovnoběžné s asymptotami a prochází body T_1, T_2.
d) Načrtněte si obrázek.

a) $2x^2-9y^2-36=0$

T: $2\cdot 6^2-9y^2-36=0$

$9y^2=36$

$y^2=4 \Rightarrow \begin{cases} y_1=2 \\ y_2=-2 \end{cases}$

$T_1[6;2]$, $T_2[6;-2]$

$2x^2-9y^2=36 \quad |\cdot\frac{1}{36}$

$$\boxed{\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{4}=1}$$

$a=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$b=2$

Tečna t_1 v bodě $T_1[6;2]$ (x_0, y_0) : $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$

$\frac{6x}{18}-\frac{2y}{4}=1 \;\dots\rightarrow\; \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1 \quad |\cdot 6$

$\boxed{t_1: 2x-3y-6=0}$ $\boxed{y=\frac{2}{3}x-2}$

Tečna t_2 v bodě $T_2[6;-2]$ ... $\frac{6x}{18}-\frac{-2y}{4}=1$

$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$

$\boxed{t_2: 2x+3y-6=0}$ $\boxed{y=-\frac{2}{3}x+2}$

b) $y=\pm\frac{b}{a}x \;\dots\; y=\pm\frac{2}{\sqrt{18}}x \;\dots\; y=\pm\frac{2}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}x \;\dots\; y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{6}x \;\dots$

$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}x \;\dots$ $\boxed{a_1: y=\frac{\sqrt{2}}{3}x}$ $\boxed{a_2: y=-\frac{\sqrt{2}}{3}x}$

c) $T_1[6;2]$: $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}$ | $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}$

$\frac{x}{3\sqrt{2}}-\frac{y}{2}=\frac{6}{3\sqrt{2}}-\frac{2}{2}$ | $\frac{x}{3\sqrt{2}}+\frac{y}{2}=\frac{6}{3\sqrt{2}}+\frac{2}{2}$

$\frac{x}{3\sqrt{2}}-\frac{y}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}-1$ | $\frac{x}{3\sqrt{2}}+\frac{y}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}+1$

$\frac{y}{2}=\frac{x}{3\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}+1 \quad |\cdot 2$ | $\frac{y}{2}=-\frac{x}{3\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}+1 \quad |\cdot 2$

$$y = \frac{2}{3\sqrt{2}}x - \frac{4}{\sqrt{2}} + 2$$

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}x - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} + 2$$

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{6}x - \frac{4\sqrt{2}}{2} + 2$$

$$y = -\frac{2}{3\sqrt{2}}x + \frac{4}{\sqrt{2}} + 2$$

$$y = -\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}x + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} + 2$$

$$y = -\frac{2\sqrt{2}}{6}x + \frac{4\sqrt{2}}{2} + 2$$

$$\boxed{p_1:\ y = \frac{\sqrt{2}}{3}x - 2\sqrt{2} + 2} \qquad \boxed{q_1:\ y = -\frac{\sqrt{2}}{3}x + 2\sqrt{2} + 2}$$

$T_2[6; -2]$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}$$

$$\frac{x}{3\sqrt{2}} - \frac{y}{2} = \frac{6}{3\sqrt{2}} - \frac{-2}{2}$$

$$\frac{x}{3\sqrt{2}} - \frac{y}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1$$

$$\frac{y}{2} = \frac{x}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 \quad |\cdot 2$$

$$y = \frac{2}{3\sqrt{2}}x - \frac{4}{\sqrt{2}} - 2$$

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}x - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} - 2$$

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{6}x - \frac{4\sqrt{2}}{2} - 2$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}$$

$$\frac{x}{3\sqrt{2}} + \frac{y}{2} = \frac{6}{3\sqrt{2}} + \frac{-2}{2}$$

$$\frac{x}{3\sqrt{2}} + \frac{y}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$$

$$\frac{y}{2} = -\frac{x}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 \quad |\cdot 2$$

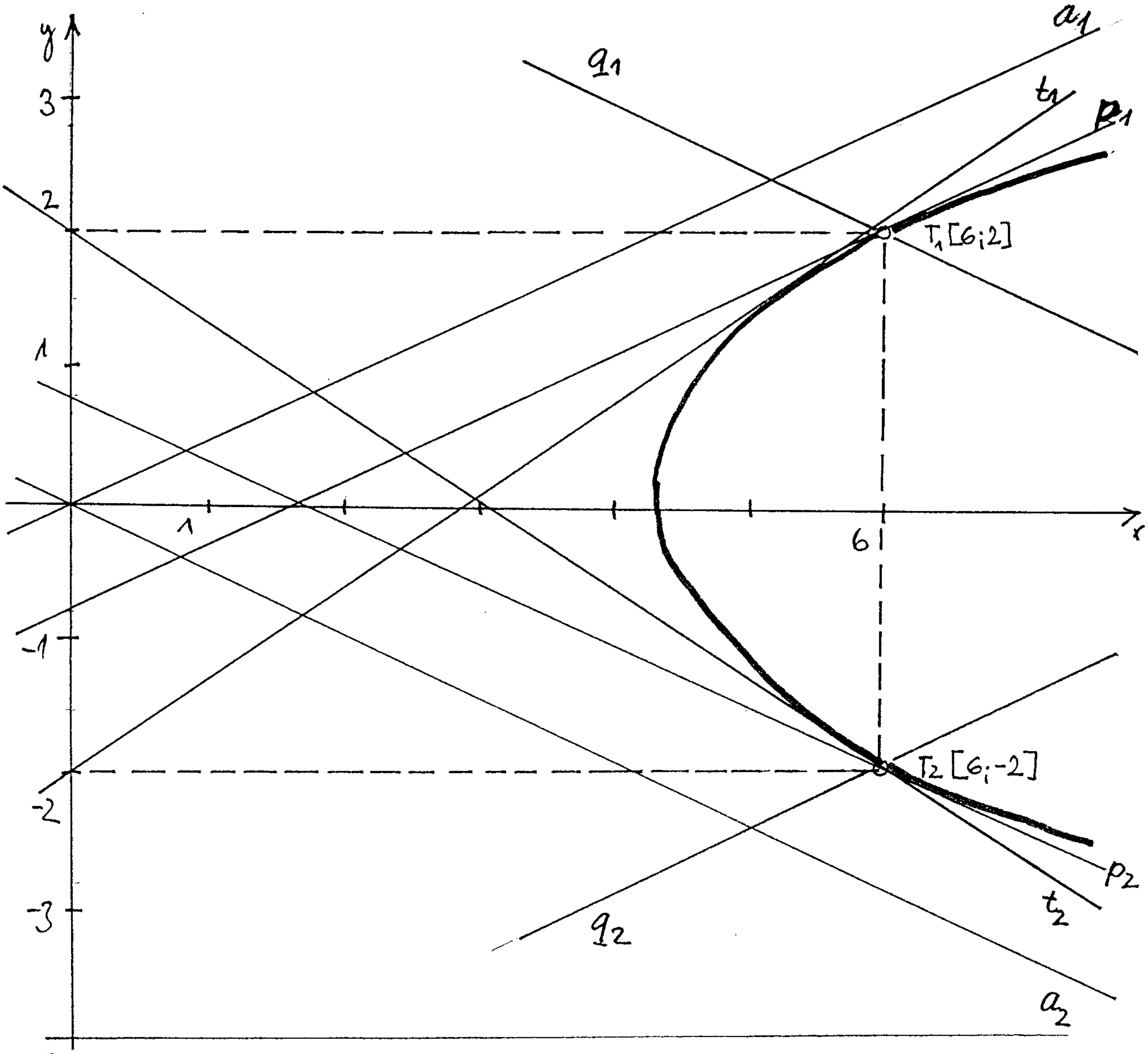
$$y = -\frac{2}{3\sqrt{2}}x + \frac{4}{\sqrt{2}} - 2$$

$$y = -\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}x + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} - 2$$

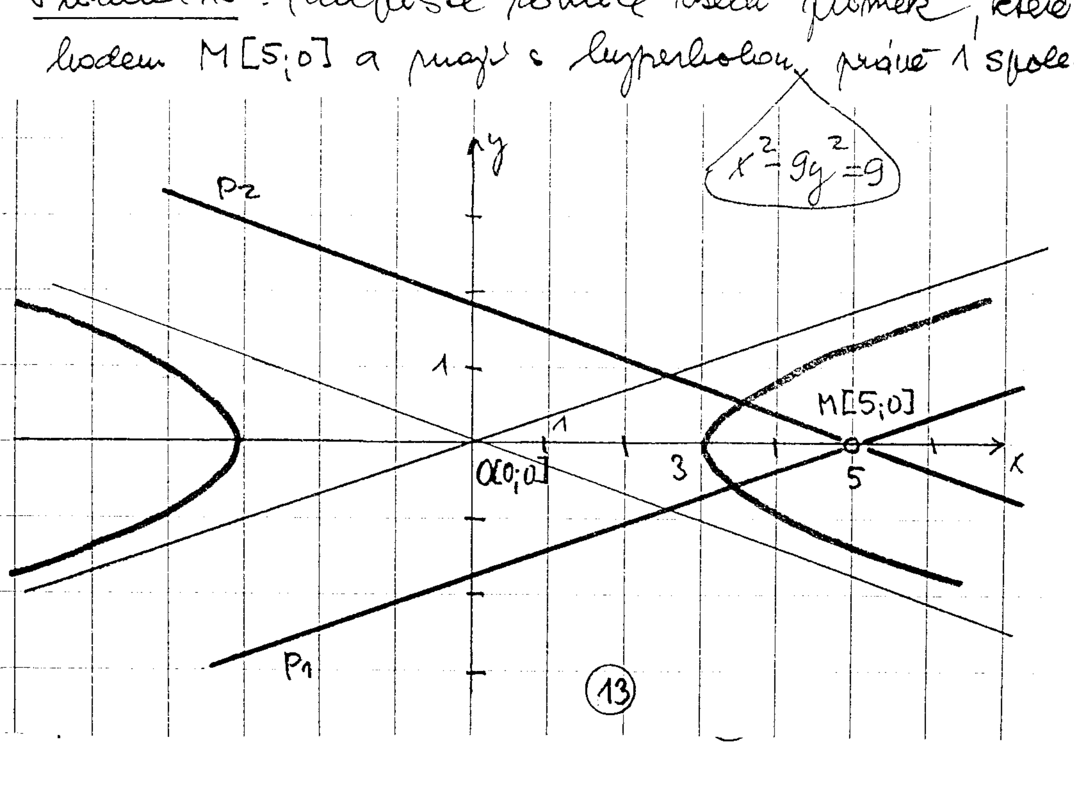
$$y = -\frac{2\sqrt{2}}{6}x + \frac{4\sqrt{2}}{2} - 2$$

$$\boxed{q_2:\ y = \frac{\sqrt{2}}{3}x - 2\sqrt{2} - 2} \qquad \boxed{p_2:\ y = -\frac{\sqrt{2}}{3}x + 2\sqrt{2} - 2}$$

Viz obrázek na str. 13.



Příklad 16: Napište rovnice všech přímek, které procházejí bodem M[5;0] a mají s hyperbolou $x^2-9y^2=9$ právě 1 společný bod.



Protože bod M patří vnitřní oblasti hyperboly, tak řešením jsou pouze přímky p_1, p_2 rovnoběžné s asymptotami.

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}$$
$$\frac{x}{3}-\frac{y}{1}=\frac{5}{3}-\frac{0}{1}$$
$$\frac{x}{3}-y=\frac{5}{3}\quad |\cdot 3$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}$$
$$\frac{x}{3}+\frac{y}{1}=\frac{5}{3}+\frac{0}{1}$$
$$\frac{x}{3}+y=\frac{5}{3}\quad |\cdot 3$$

$p_1: x-3y-5=0$	$p_2: x+3y-5=0$
$p_1: y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$	$p_2: y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

$$x^2-9y^2=9\quad |\cdot\frac{1}{9}$$
$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1}=1$$
$$a^2=9 \Rightarrow a=3$$
$$b^2=1 \Rightarrow b=1$$

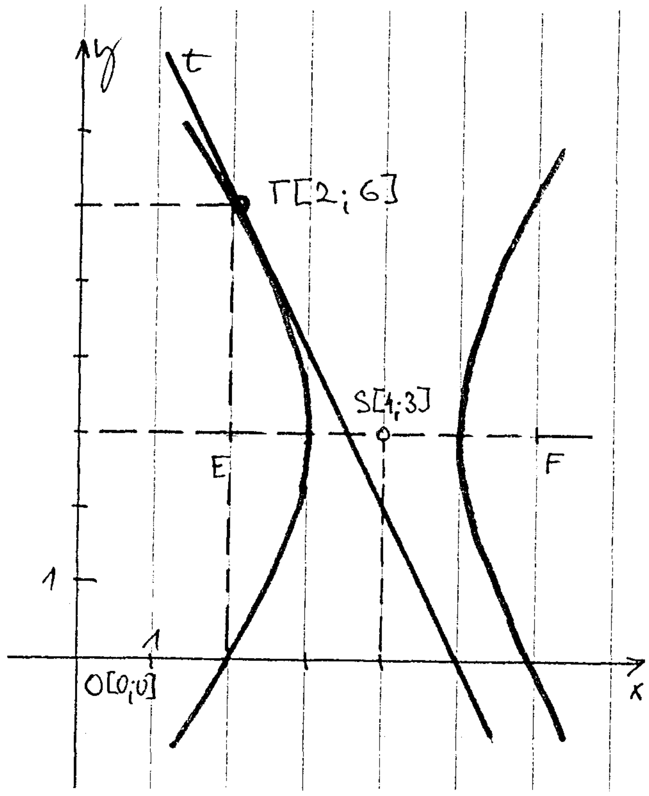
<u>Příklad 17:</u> Napište rovnici tečny hyperboly $(x-4)^2-\frac{1}{3}(y-3)^2=1$ v jejím bodě $T[2;6]$.

$$(x-4)^2-\frac{1}{3}(y-3)^2=1$$
$$\frac{(x-4)^2}{1}-\frac{(y-3)^2}{3}=1$$

$a^2=1$ $\boxed{a=1}$ $b^2=3$ $\boxed{b=\sqrt{3}}$ $\boxed{S[4;3]}$

Tečna v bodě $T[\overset{x_0}{2};\overset{y_0}{6}]$

$$\frac{(x_0-m)\cdot(x-m)}{a^2}-\frac{(y_0-n)\cdot(y-n)}{b^2}=1$$
$$\frac{(2-4)(x-4)}{1}-\frac{(6-3)(y-3)}{3}=1$$
$$-2(x-4)-\frac{\cancel{3}\cdot(y-3)}{\cancel{3}}=1$$
$$-2x+8-y+3=1$$
$$-2x-y=-10\quad |:(-2)$$
$$y+2x=10$$
$$\boxed{t:\quad y=-2x+10}$$



<u>Příklad 18</u> (5.111/159 Sb.) Napište rovnice tečen hyperboly dané rovnicí $4x^2-9y^2=36$ rovnoběžných s přímkou danou rovnicí $x+y+5=0$.

Tečna bude mít rovnici $x+y+c=0$ (nebo $x+y+q=0$)

$$4x^2-9y^2=36$$
$$x+y+c=0$$

$x=-y-c$ dosadíme do rovnice hyperboly

$4(-y-c)^2-9y^2=36$

$4(y^2+2cy+c^2)-9y^2-36=0$

$4y^2+8cy+4c^2-9y^2-36=0$

$-5y^2+8cy+4c^2-36=0 \quad |\cdot(-1)$

$\underbrace{5}_{a}y^2-\underbrace{8c}_{b}y+\underbrace{36-4c^2}_{c}=0$

→ Přímka $x+y+c=0$ bude sečnou hyperbol, právě když je $D=0$

$b^2-4ac=0$

$(8c)^2-20(36-4c^2)=0$

$64c^2-720+80c^2=0$

$144c^2=720$

$c^2=5 \Rightarrow c=\pm\sqrt{5}$

$$\boxed{t_1: x+y+\sqrt{5}=0}$$
$$\boxed{t_2: x+y-\sqrt{5}=0}$$

Pro postrojení grafu potřebujeme následující údaje

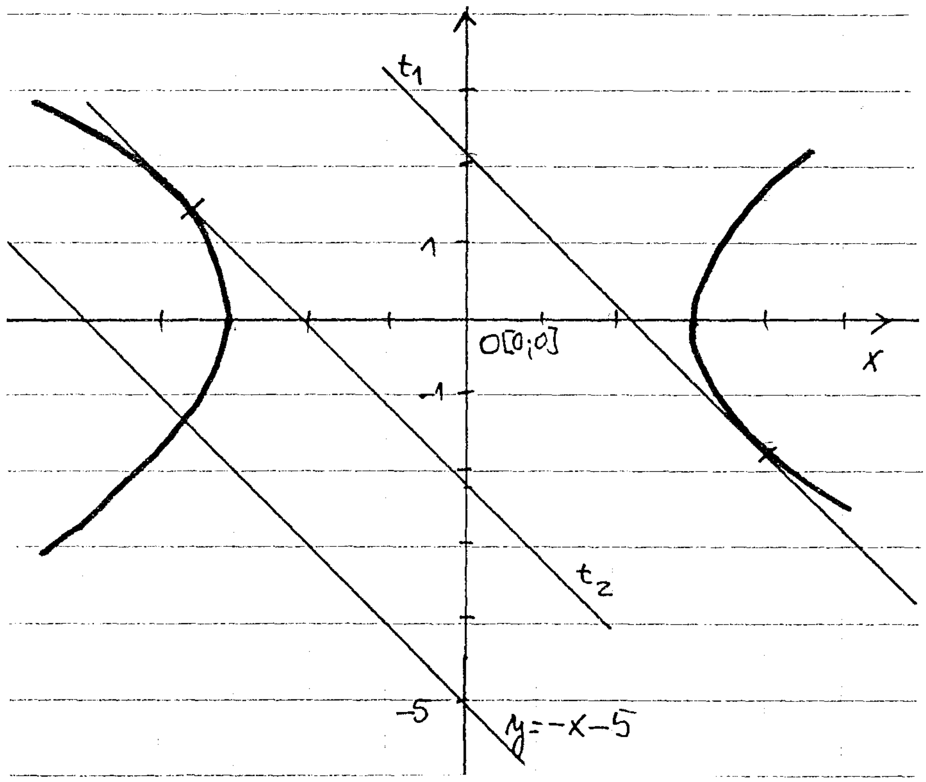
$4x^2-9y^2=36 \quad |\cdot\frac{1}{36}$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

$a^2=9 \rightarrow a=3$

$b^2=4 \rightarrow b=2$

$S[0;0]$



Příklad 19 (5.112/59 Sb)

Napište rovnice sečen hyperbol o rovnici $16x^2-9y^2+32x+18y-137=0$, které jsou kolmé k přímce dané rovnicí $x+4y-3=0$.

$4y=-x+3$

$y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$

↓

To je směrnice dané přímky.

Směrnice kolmice je $-\frac{1}{k}=4$

Rovnice kolmice je: $y=4x+q$ (nebo $y=4x+c$ jako v př. 18)

Tuto rovnici dosadíme do rovnice hyperbol.

$16x^2-9y^2+32x+18y-137=0$

$16x^2-9(4x+q)^2+32x+18(4x+q)-137=0$

$$16x^2 - 9(16x^2 + 8qx + q^2) + 32x + 72x + 18q - 137 = 0$$

$$16x^2 - 144x^2 - 72qx + 32x + 72x + 18q - 137 = 0$$

$$-128x^2 - 72qx + 104x - 9q^2 + 18q - 137 = 0 \quad |\cdot(-1)$$

$$128x^2 + 72qx - 104x + 9q^2 - 18q + 137 = 0$$

$$\underbrace{128}_{a}x^2 + \underbrace{(72q - 104)}_{b}x + \underbrace{(9q^2 - 18q + 137)}_{c} = 0$$

Protože jde o tečny, tak musí být $D = 0$

$$b^2 - 4ac \ldots \quad (72q - 104)^2 - 512(9q^2 - 18q + 137) = 0$$

$$5184q^2 - 14976q + 10816 - 4608q^2 + 9216q - 70144 = 0$$

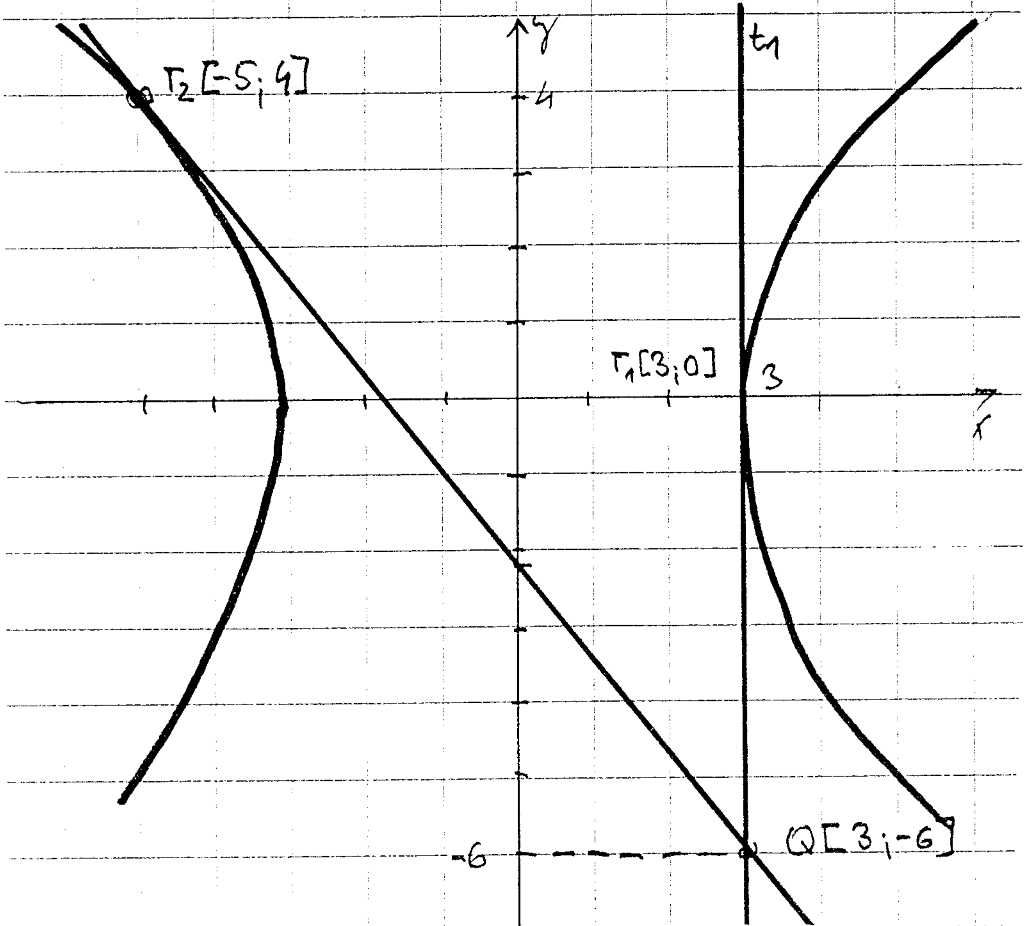
$$576q^2 - 5760q - 59328 = 0 \quad |:576$$

$$q^2 - 10q - 103 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{512}}{2} = \frac{10 \pm 16\sqrt{2}}{2} = 5 \pm 8\sqrt{2}$$ dej do rovnice

Rovnice: $\boxed{y = 4x + 5 \pm 8\sqrt{2} \qquad 4x - y + 5 \pm 8\sqrt{2}}$ jsou rovnice tečen.

Příklad 20: Je dána křivka $x^2-y^2=9$ a bod $Q[3;-6]$. Napište rovnici tečny k dané křivce procházející bodem Q.



$x^2-y^2=9 \mid \cdot \frac{1}{9}$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$

$a^2=9,\ a=3$

$b^2=9,\ b=3$

$Q[3;-6]$ dosadíme do rovnice tečny

$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$

$\frac{3x}{9}+\frac{6y}{9}=1 \mid \cdot 9$

$3x+6y=9 \mid :3$

$x+2y=3$

$2y=-x+3 \mid :2$

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ dosadíme do rovnice hyperboly:

$x^2-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)^2=9$

$x^2-\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)=9$

$x^2-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}=0$

$\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{45}{4}=0 \mid \cdot 4$

$3x^2+6x-45=0 \mid :3$

$x^2+2x-15=0$

$x_{1,2}=\frac{-2\pm 8}{2}=\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-5 \end{cases}$

$y_1=-\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{3}{2}=0$

$y_2=-\frac{1}{2}\cdot(-5)+\frac{3}{2}=4$

$T_1[3;0]$

$t_1: \frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$

$\frac{3x}{9}-0=1$

$3x=9$

$t_1: \boxed{x=3}$

$T_2[-5;4]$

$\frac{-5x}{9}-\frac{4y}{9}=1$

$-5x-4y=9$

$-4y=5x+9$

$t_2: \boxed{y=-\frac{5}{4}x-\frac{9}{4}}$