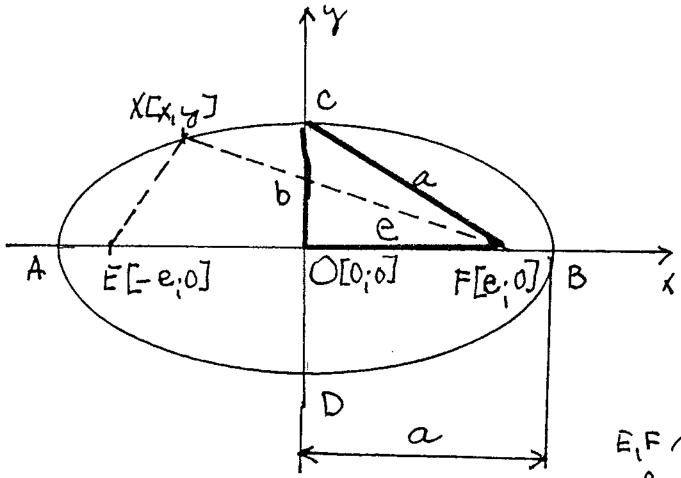
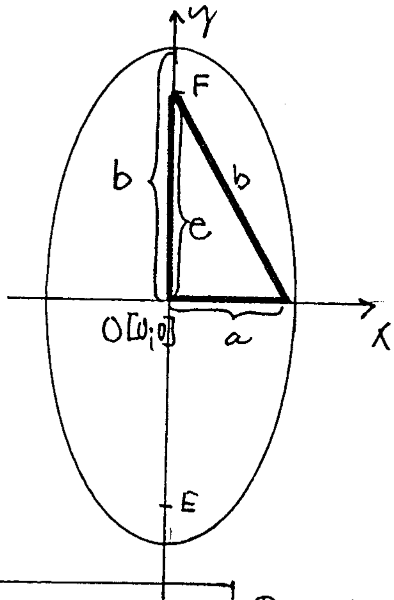
17b) ELIPSA V ANALYTICKÉ GEOMETRII





E, F jsou ohniska.

Přímka EF je hlavní osa.
" CD " vedlejší " .

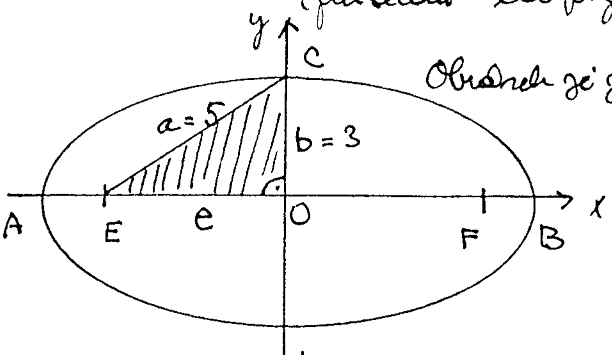
|OA| = |OB| je hlavní poloosa.
|OC| = |OD| " vedlejší poloosa.
e je výstřednost – excentricita.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

$$\boxed{b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0}$$

Rovnice elipsy (osová) se středem O[0;0]

<u>Příklad 1</u>: a) Napište rovnici elipsy, je-li $a=5$, $b=3$.
b) Určete souřadnice ohnisek a souřadnice průsečíků elipsy s osou $\underline{x}$ a s osou y.



Obrázek je jen náčrt.

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\boxed{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1}$$

b) $e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$ ... $\boxed{E[-4;0],\ F[4;0]}$

$\boxed{A[-5;0],\ B[5;0]}$ $\boxed{C[0;3],\ D[0;-3]}$

<u>Příklad 2</u>: Zjistěte, zda rovnice $4x^2+9y^2-144=0$ je rovnicí elipsy.

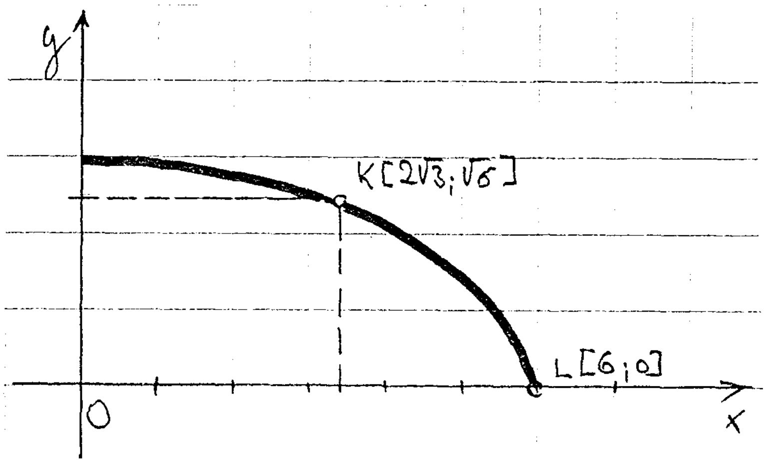
$4x^2+9y^2=144 \quad |:144$

$\frac{4x^2}{144}+\frac{9y^2}{144}=\frac{144}{144}$

$$\boxed{\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1}$$

ano, je rovnicí elipsy, ve které $a=6$, $b=4$.

Příklad 3 (5.39/51 Sb): Napište rovnici elipsy, jejíž osy splývají s osami soustavy souřadnic, a která prochází body K[2√3; √6], L[6;0].



z L[6;0] ⇒ $a=6$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$(1)\quad \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{... dosaď K}$$

$$\frac{(2\sqrt{3})^2}{36}+\frac{(\sqrt{6})^2}{b^2}=1$$

$$\frac{12}{36}+\frac{6}{b^2}=1$$

$$\frac{1}{3}+\frac{6}{b^2}=1$$

$$\frac{6}{b^2}=\frac{2}{3}$$

$$2b^2=18$$

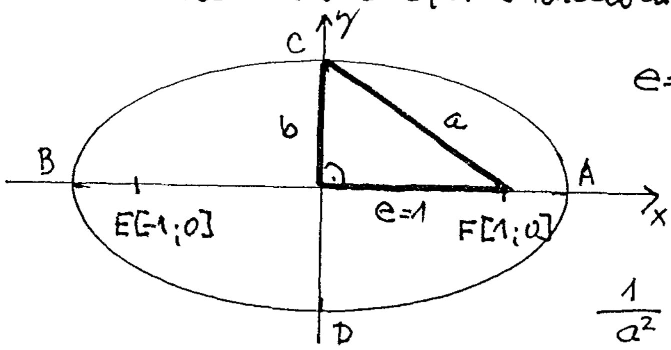
$$b^2=9$$

$\boxed{b=3}$ dosaď do (1)

$$\boxed{\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1} \quad \text{lze upravit } |\cdot 36$$

$$\boxed{x^2+4y^2-36=0}$$

Příklad 4 (1/161 uč.): Napište rovnici elipsy s ohnisky E[−1;0], F[1;0], která prochází bodem $[1; \frac{8}{3}]$. Určete souřadnice jejích hlavních a vedlejších vrcholů (viz obr.).



$e=1$, $b^2=a^2-1$ $\quad a^2-b^2=1$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1, \text{ dosaď } x=1, y=\frac{8}{3}$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{\left(\frac{8}{3}\right)^2}{a^2-1}=1$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{64}{9(a^2-1)}=1 \quad |\cdot 9\cdot(a^2-1)\cdot a^2$$

$$9(a^2-1)+64a^2=9a^2(a^2-1)$$

$$9a^2-9+64a^2=9a^4-9a^2$$

$$9a^4-82a^2+9=0, \text{ subst. } a^2=z$$

$$9z^2-82z+9=0$$

$$z_{1,2}=\frac{82\pm\sqrt{82^2-4\cdot 81}}{18}=\frac{82\pm 80}{18}=\begin{cases} z_1=9 \\ z_2=\frac{1}{9}\end{cases}$$

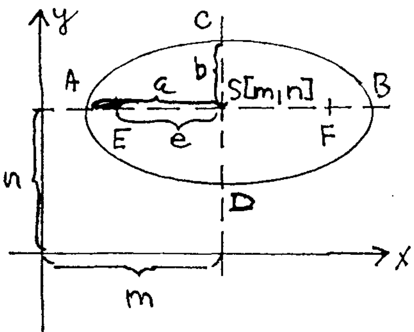
$z_1=9$	$a^2=9$	$b^2=a^2-e^2$, $b^2=9-1$, $\boxed{b^2=8}$
$z_2=\frac{1}{9}$	$a^2=\frac{1}{9}$	$b^2=a^2-e^2$, $b^2=\frac{1}{9}-1$, $b=-\frac{8}{9}$ nevyhovuje

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1$

$\boxed{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1}$

Z rovnice $a^2=9$, $a=\sqrt{9}$, $a=3$; $b^2=8$, $b=\sqrt{8}$, $b=2\cdot\sqrt{2}$ (Hodnoty $\ominus$ nevyhovují)

$A[3;0]$, $B[-3;0]$, $C[0;2\sqrt{2}]$, $D[0;-2\sqrt{2}]$



$a>b$, hlavní osa je $\parallel$ s osou x

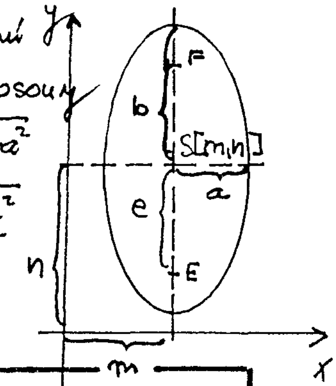
$E[m-\sqrt{a^2-b^2};n]$

$F[m+\underbrace{\sqrt{a^2-b^2}}_{e};n]$

$a<b$, hlavní osa je $\parallel$ s osou y

$E[m;n-\sqrt{b^2-a^2}]$

$F[m;n+\underbrace{\sqrt{b^2-a^2}}_{e}]$



$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1}$$

Obecná rovnice elipsy

$$px^2+qy^2+2rx+2sy+t=0$$

$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1}$$

Příklad 5: Zjistěte, zda rovnice $x^2+4y^2+4x-8y-32=0$ je rovnicí elipsy. V kladném případě pak určete souřadnice bodů S, A, B, C, D, E, F.

$x^2+4y^2+4x-8y-32=0$ je obecná rovnice elipsy

$x^2+4x+4-4+4(y^2-2y)=32$

$(x+2)^2-4+4[y^2-2y+1-1]=32$

$(x+2)^2-4+4[(y-1)^2-1]=32$

$(x+2)^2-4+4(y-1)^2-4=32$

$(x+2)^2+4(y-1)^2=40 \quad |\cdot\frac{1}{40}$

$\frac{(x+2)^2}{40}+\frac{4(y-1)^2}{40}=1$

$\boxed{\frac{(x+2)^2}{40}+\frac{(y-1)^2}{10}=1}$ **ANO**

$S=[-2;1]$

$E[m-e;n]\ldots[-2-\sqrt{30};1]$

$F[m+e;n]\ldots[-2+\sqrt{30};1]$

$A[m-a;n]\ldots[-2-2\sqrt{10};1]$

$B[m+a;n]\ldots[-2+2\sqrt{10};1]$

$C[m;n-b]\ldots[-2;1-\sqrt{10}]$

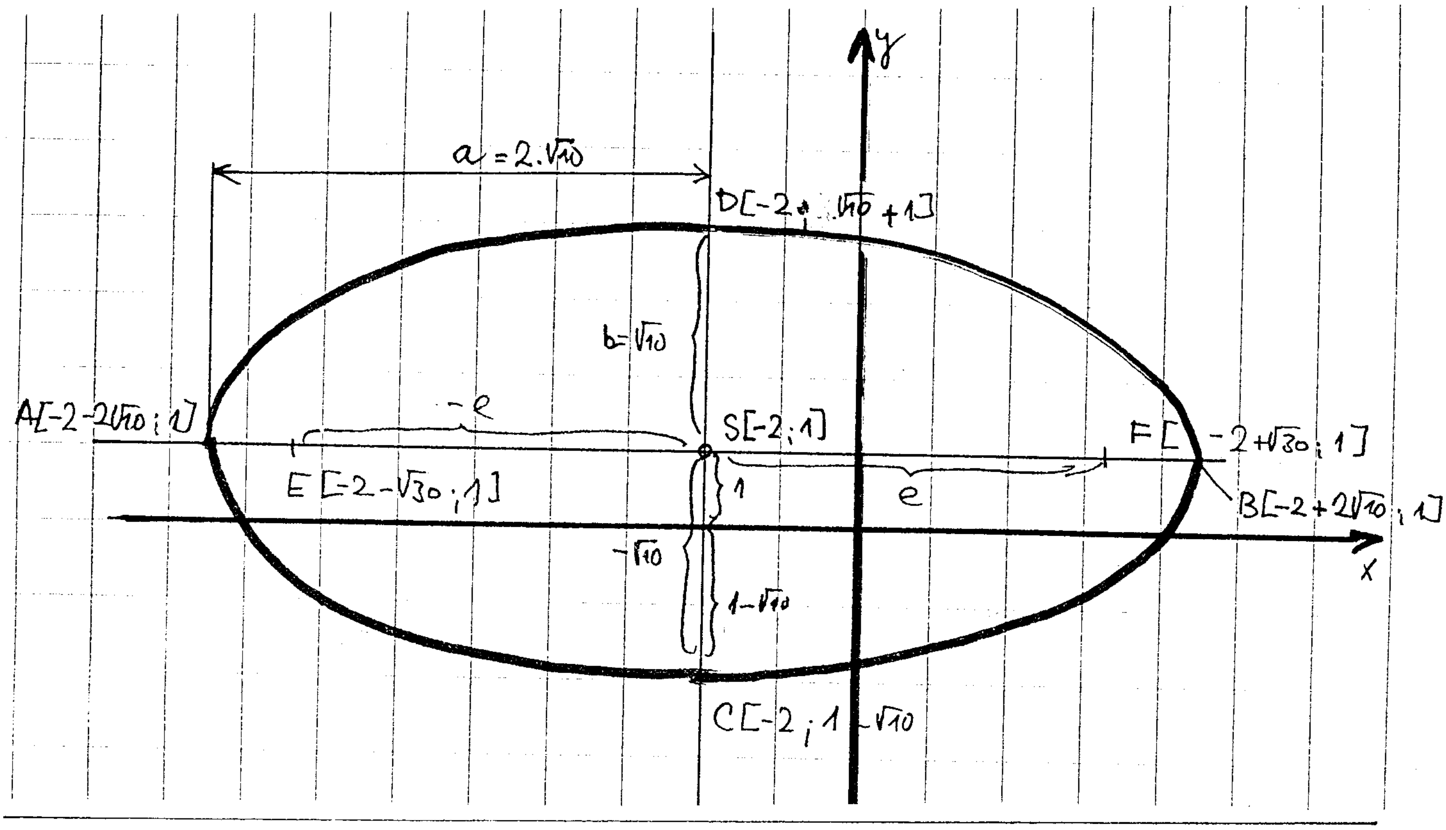
$D[m;n+b]\ldots[-2;1+\sqrt{10}]$

$a^2=40$, $a=\sqrt{40}$, $\boxed{a=2\cdot\sqrt{10}}$

$b^2=10$, $\boxed{b=\sqrt{10}}$

$e^2=a^2-b^2$, $e^2=40-10$, $\boxed{e=\sqrt{30}}$

Obr. je nasl. 4.



Příklad 6: Totéž jako v příkladu 5 pro rovnici $x^2+4y^2+4x-21=0$

$x^2+4y^2+4x-21=0$

$x^2+4x+4y^2=21$

$\underline{x^2+4x+4}+4y^2-4=21$

$(x+2)^2+4(y+0)^2=25 \quad | \cdot \frac{1}{25}$

$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{4(y+0)^2}{25}=1$

$$\boxed{\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y+0)^2}{6{,}25}=1}$$

$S[-2;0]$

$a^2=25$

$\boxed{a=5}$

$b^2=6{,}25$

$b=\sqrt{6{,}25}$

$\boxed{b=2{,}5}$

$e^2=a^2-b^2$

$e^2=25-6{,}25$

$e^2=18{,}75$

$e=\sqrt{18{,}75}$

$e=\sqrt{6{,}25\cdot 3}$

$\boxed{e=2{,}5\cdot\sqrt{3}}$

$E\,[m-e;n]=[-2-2{,}5\sqrt{3};0]$, $A[m-a;n]=[-2-5;0]\ldots[-7;0]$

$F\,[m+e;n]=[-2+2{,}5\sqrt{3};0]$, $B[m+a;n]=[-2+5;0]\ldots[3;0]$

$C[m;n-b]=[-2;0-2{,}5]\ldots[-2;-2{,}5]$

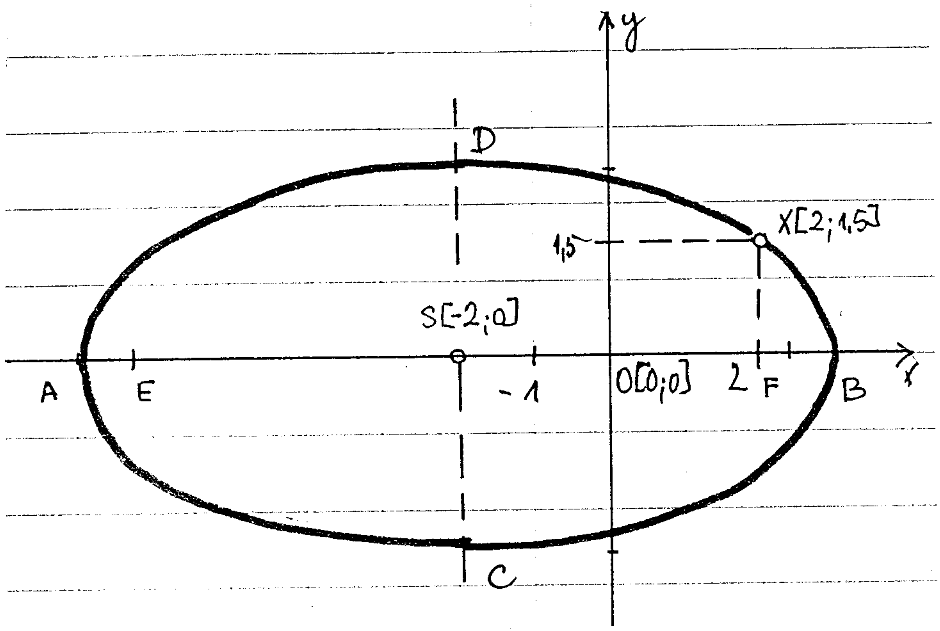
$D[m;n+b]=[-2;0+2{,}5]\ldots[-2;2{,}5]$

$\underbrace{E[-6{,}33;0],\ F[2{,}33;0]}_{\text{přibližně}}$

Ověřme, zda bod $X[2;1{,}5]$ leží na elipse.

Pro $x=2\ldots\ 4+4y^2+8-21=0\ \ldots 4y^2=9,\ y^2=\frac{9}{4},\ y_{1,2}=\pm\frac{3}{2}=\pm 1{,}5$. **ANO**

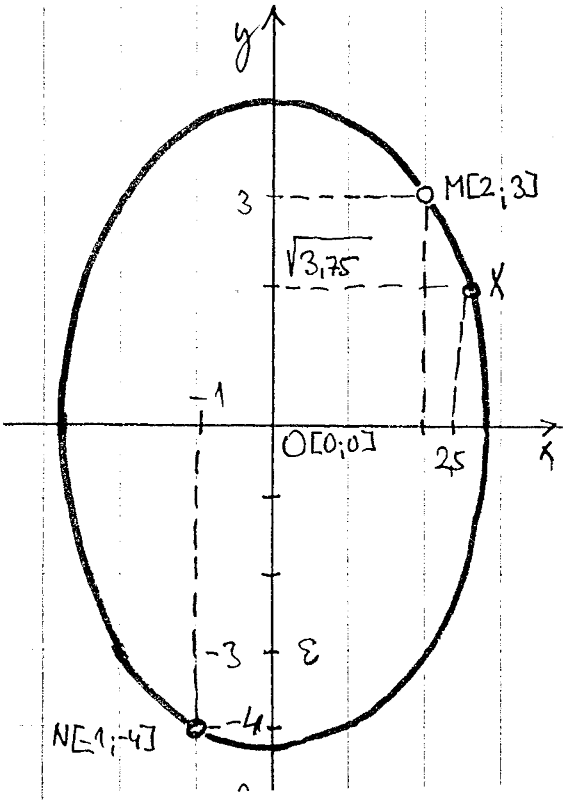
Sestrojte graf.



<u>Příklad 7</u>: a) Najděte osovou rovnici elipsy, která prochází body $M[2;3]$, $N[-1;-4]$.

b) Leží na této elipse bod $X[2{,}5;\sqrt{3{,}75}]$?

<u>Řešení</u>:



a) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Pro $M[2;3]$: $\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \quad |\cdot a^2b^2$

$4b^2+9a^2=a^2b^2$

$\boxed{9a^2+4b^2-a^2b^2=0}$ (1)

Pro $N[-1;-4]$: $\frac{1}{a^2}+\frac{16}{b^2}=a^2b^2 \quad |\cdot a^2b^2$

$b^2+16a^2=a^2b^2$

$\boxed{16a^2+b^2-a^2b^2=0}$ (2)

Pozor!

Odečteme (2) od (1)

$9a^2+4b^2-a^2b^2=0$

$-16a^2-b^2+a^2b^2=0$

$-7a^2+3b^2=0$

$\boxed{b^2=\frac{7}{3}a^2}$ (3)

(3) do (2)

$16a^2 + \frac{7}{3}a^2 - a^2 \cdot \frac{7}{3}a^2 = 0 \quad | : a^2$

$16 + \frac{7}{3} - \frac{7}{3}a^2 = 0$

$\frac{7}{3}a^2 = \frac{55}{3} \quad | \cdot 3$

$7a^2 = 55$

$a \doteq 2{,}8 \Leftarrow \boxed{a^2 = \frac{55}{7}}$ (4)

(4) do (3)

$b^2 = \frac{7}{3} \cdot \frac{55}{7}$

$\boxed{b^2 = \frac{55}{3}} \Rightarrow b \doteq 4{,}3$

$$\boxed{\frac{x^2}{\frac{55}{7}} + \frac{y^2}{\frac{55}{3}} = 1}$$

a<b, preto má elipsa tvar, jaký je na obr.

b) $L = \frac{2{,}5^2}{\frac{55}{7}} + \frac{(\sqrt{3{,}75})^2}{\frac{55}{3}} = \frac{43{,}75}{55} + \frac{11{,}25}{55} = \frac{55}{55} = 1, \; P = 1, \; L = P$

Bod $X[2{,}5; \sqrt{3{,}75}]$ leží na elipse.

Príklad 8 (5.41/51 Sb.) Určte súradnice ohnísk, dĺžky hlavnej a vedľajšej poloosy a excentricitu elipsy danej rovnicou:

a) $9x^2 + 25y^2 = 4$

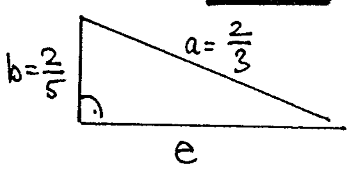
$\frac{x^2}{9^{-1}} + \frac{y^2}{25^{-1}} = 4$

$\frac{x^2}{\frac{1}{9}} + \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 4 \quad | \cdot \frac{1}{4}$

$$\boxed{\frac{x^2}{\frac{4}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{25}} = 1}$$

$a^2 = \frac{4}{9}$ $\quad$ $b^2 = \frac{4}{25}$

$\boxed{a = \frac{2}{3}}$ $\quad$ $\boxed{b = \frac{2}{5}}$ $\Big\}$ $a > b$



$e = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{4}{25}} =$

$= \sqrt{\frac{64}{225}} = \frac{8}{15}$

$\boxed{e = \frac{8}{15}}$ $\quad$ $\boxed{E\left[-\frac{8}{15}; 0\right], \; F\left[\frac{8}{15}; 0\right]}$

---

b) $16x^2 + 25y^2 = 400$

$\frac{x^2}{\frac{1}{16}} + \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 400 \quad | \cdot \frac{1}{400}$

$\frac{x^2}{\frac{400}{16}} + \frac{y^2}{\frac{400}{25}} = 1$

$$\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$$

$a^2 = 25$ $\quad$ $b^2 = 16$

$\boxed{a = 5}$ $\quad$ $\boxed{b = 4}$ $\Big\}$ $a > b$

$e = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$ $\qquad$ $e = 3$

$\boxed{E[-3; 0], \; F[3; 0]}$

c) $2x^2+y^2=32 \quad | \cdot \frac{1}{2}$

$x^2+\frac{y^2}{2}=16 \quad | \cdot \frac{1}{16}$

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{32}=1$

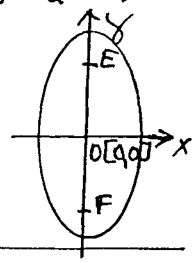
$a^2=16 \quad b^2=32$

$a=4 \quad b=\sqrt{32}=4.\sqrt{2}$, $b=4.\sqrt{2}$

Protože $b>a$, tak $e=\sqrt{b^2-a^2}=$

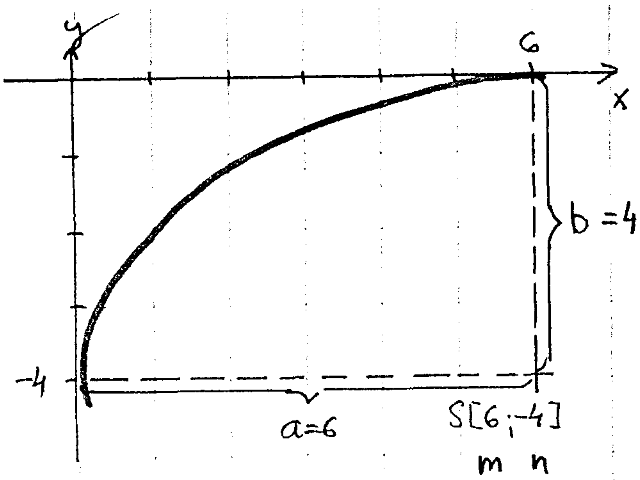
$=\sqrt{32-16}=\sqrt{16}=4$; $e=4$

$E[0;4]$; $F[0;-4]$



Příklad 9 (5.44/52 S6): Napište rovnici elipsy, která se dotýká souřadnicových os, její osy jsou || se souřadnicovými osami x, y a platí:

a) střed má souřadnice $S[6;-4]$,



$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

$$\boxed{\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1} \quad | \cdot 36 \cdot 16$$

$$16(x-6)^2+36(y+4)^2=576 \quad | :4$$

$$\boxed{4(x-6)^2+9(y+4)^2=144}$$

---

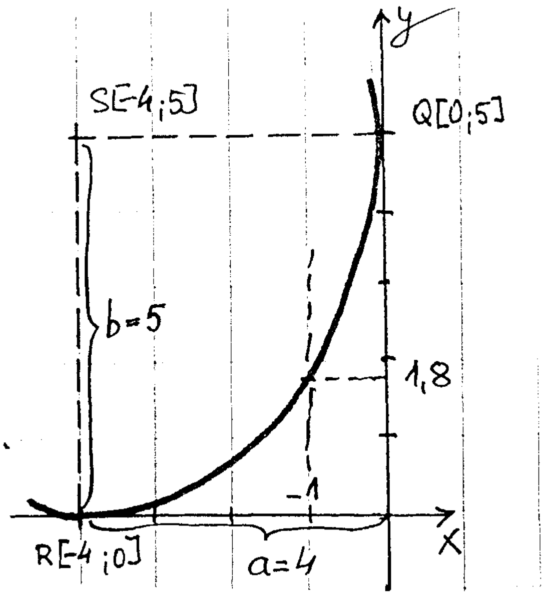
b) osy x se dotýká v bodě $R[-4;0]$, osy y v bodě $Q[0;5]$?

Protože $a<b$, tak použijeme vzorec:

$$\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1$$

$$\boxed{\frac{(x+4)^2}{25}+\frac{(y-5)^2}{16}=0} \quad | \cdot 25 \cdot 16$$

$$\boxed{16(x+4)^2+25(y-5)^2=400}$$



Výsledek uvedený ve sbírce je špatně. Správnost našeho výsledku si ověříme výpočtem hodnoty y, je-li $x=-1$.

Pro $x=1$ dosadíme: $16(-1+4)^2+25(y-5)^2=400$

$$144+25(y^2-10y+25)=400$$
$$144+25y^2-250y+625-400=0$$
$$25y^2-250y+369=0$$

$$y_{1,2}=\frac{250\pm\sqrt{25600}}{50}=\frac{250\pm160}{50}=\left\langle \begin{matrix} y_1=1{,}8 \\ y_2=8{,}2 \end{matrix}\right\}$$ což odpovídá našemu obrázku

---

Příklad 10 (5.46152 Sb):

Elipsa je dána rovnicí $4x^2+9y^2=36$. Najděte její společné body s přímkou

a) $2x+3y-6=0$

$$\left.\begin{matrix} 4x^2+9y^2=36 \\ 2x+3y-6=0 \end{matrix}\right\}\text{soustava rovnic}$$

$3y=-2x+6 \quad |:3$

$\boxed{y=-\frac{2}{3}x+2}$

$$4x^2+9\left(-\frac{2}{3}x+2\right)^2=36$$
$$4x^2+9\left(\frac{4}{9}x^2-\frac{8}{3}x+4\right)=36$$
$$4x^2+4x^2-24x\cancel{+36}=\cancel{36}$$
$$8x^2-24x=0 \quad |:8$$
$$x^2-3x=0$$
$$x(x-3)=0 \left\langle \begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=3 \end{matrix}\right.$$

Pro $x_1=0$ je $y_1=-\frac{2}{3}\cdot0+2=2$

Pro $x_2=3$ je $y_2=-\frac{2}{3}\cdot3+2=0$

$\boxed{\text{Přímka protíná elipsu v bodech } [0;2] \text{ a } [3;0].}$

---

b) $x-y-6=0$

$4x^2+9y^2=36$

$x-y-6=0$

$\boxed{y=x-6}$

$$4x^2+9(x-6)^2=36$$
$$4x^2+9(x^2-12x+36)=36$$
$$4x^2+9x^2-108x+324-36=0$$
$$13x^2-108x+288=0$$
$$x_{1,2}=\frac{108\pm\sqrt{-3312}}{26}, \quad D<0$$

Daná přímka je vnější přímka elipsy (elipsu neprotíná).

c) $4x^2+9y^2=36$ ... přímka: $2x+3\sqrt{3}y-12=0$

$2x+3\sqrt{3}y-12=0$

$2x=12-3\sqrt{3}y \quad |:2$

$\boxed{x=6-1{,}5\cdot\sqrt{3}\,y}$

$$4(6-1{,}5\sqrt{3}\,y)^2+9y^2=36$$
$$4(36-18\sqrt{3}\,y+6{,}75y^2)+9y^2=36$$

$$144 - 72\sqrt{3}\,y + 27y^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

$$36y^2 - 72\sqrt{3}\,y + 108 = 0 \quad |:36$$

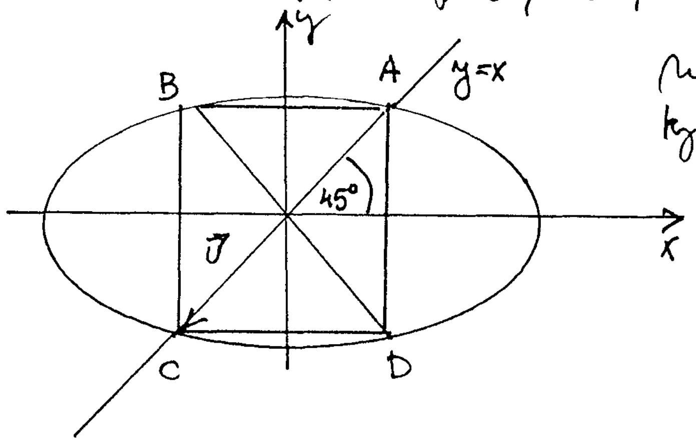
$$y^2 - 2\sqrt{3}\,y + 3 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{4.3 - 12}}{2} = \frac{2\sqrt{3} \pm 0}{2} = \sqrt{3}$$

Pro $y = \sqrt{3}$ je $x = 6 - 1{,}5\sqrt{3}.\sqrt{3} = 6 - 1{,}5.3 = 1{,}5$

<u>Daná přímka je tečna elipsy v bodě $[1{,}5; \sqrt{3}]$.</u>

<u>Příklad 11:</u> Vypočítejte obsah čtverce, který je vepsán do elipsy tak, že jeho úhlopříčky leží na osách I. a III. kvadrantu a II. a IV. kvadrantu. Elipsa má rovnici $x^2 + 2y^2 = 18$.



Nejdříve určíme průsečíky přímky s rovnicí $y = x$ a elipsy s rovnicí $x^2 + 2y^2 = 18$

$$y = x$$
$$x^2 + 2x^2 = 18$$
$$3x^2 = 18$$
$$x^2 = 6 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{6}$$

Pro $x_1 = \sqrt{6}$ je $y_1 = \sqrt{6}$ … $A[\sqrt{6}; \sqrt{6}]$

Pro $x_2 = -\sqrt{6}$ je $y_2 = -\sqrt{6}$ … $C[-\sqrt{6}; -\sqrt{6}]$

Délku úhlopříčky AC určíme jako délku vektoru $\vec{u} = C - A$

$$\vec{u} = (-\sqrt{6} - \sqrt{6}; -\sqrt{6} - \sqrt{6}) = (-2\sqrt{6}; -2.\sqrt{6})$$

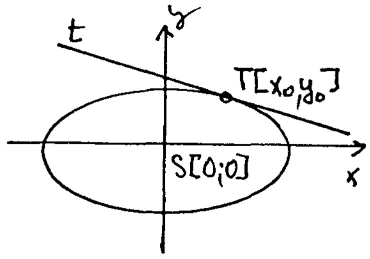
$$|\vec{u}| = \sqrt{(-2\sqrt{6})^2 + (-2\sqrt{6})^2} = \sqrt{4.6 + 4.6} = \sqrt{48} = 4.\sqrt{3}$$

$|AC| = 4.\sqrt{3}$

$$u = a.\sqrt{2}$$
$$a = \frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{4.\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

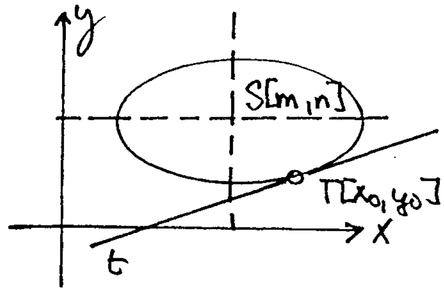
$$S = a^2$$
$$S = \left(\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{16.3}{2} = 8.3 = 24$$

<u>Čtverec má obsah 24 čtverečných jednotek.</u>



Má-li elipsa polohu jako na obrázku, má tečna t v bodě $T[x_0; y_0]$ rovnici:

$$\boxed{\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$$



Má-li elipsa polohu jako na obrázku, má tečna t v bodě $T[x_0, y_0]$ rovnici:

$$\boxed{\frac{(x-m)\cdot(x_0-m)}{a^2} + \frac{(y-n)\cdot(y_0-n)}{b^2} = 1}$$

Příklad 12 (5.32/169-uč.) Napište rovnici tečny elipsy $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ v jejím bodě $T\left[4; -\frac{9}{5}\right]$

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

$$\frac{4x}{25} + \frac{-\frac{9}{5}y}{9} = 1$$

$$\frac{4x}{25} - \frac{9y}{45} = 1$$

$$\frac{4x}{25} - \frac{y}{5} = 1 \quad |\cdot 25$$

$$\boxed{4x - 5y - 25 = 0}$$

Příklad 13: a) Rozhodněte, zda rovnice $x^2+4y^2+4x-8y-32=0$ je rovnicí elipsy.

b) V kladném případě napište rovnici její tečny v bodě $T[4; 2]$.

$$x^2+4x + 4y^2-8y = 32$$

$$x^2+4x + 4(y^2-2y) = 32$$

$$\underline{x^2+4x+4} - 4 + 4[\underline{y^2-2y+1} - 1] = 32$$

$$(x+2)^2 - 4 + 4[(y-1)^2 - 1] = 32$$

$$(x+2)^2 - 4 + 4(y-1)^2 - 4 = 32$$

$$(x+2)^2 + 4(y-1)^2 = 40 \quad |\cdot \frac{1}{40}$$

$$\frac{(x+2)^2}{40} + \frac{4(y-1)^2}{40} = 1$$

$$\boxed{\frac{(x+2)^2}{40} + \frac{(y-1)^2}{10} = 1}$$ je rovnice elipsy.

$S[-2; 1]$ $T[4; 2]$ (x_0 y_0)

$a = \sqrt{40}$

$\underline{a^2 = 40, \; b^2 = 10}$

do rovnice tečny elipsy

$$\frac{(x_0-m)\cdot(x-m)}{a^2} + \frac{(y_0-n)\cdot(y-n)}{b^2} = 1$$

$$\frac{(4+2)\cdot(x+2)}{40} + \frac{(2-1)\cdot(y-1)}{10} = 1$$

$$\frac{6(x+2)}{40} + \frac{y-1}{10} = 1 \quad |\cdot 40$$

$$6x + 12 + 4y - 4 = 40$$

$$6x + 4y - 32 = 0 \quad |:2$$

$$\boxed{t: \; 3x + 2y - 16 = 0}$$

Příklad 14 (vlastní): Určete délku tětivy elipsy s rovnicí $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, kterou na ní vytíná přímka daná rovnicí $x-y-2=0$.

$y = x-2$

$\frac{x^2}{16}+\frac{(x-2)^2}{4}=1$

$\frac{x^2}{16}+\frac{x^2-4x+4}{4}=1 \quad | \cdot 16$

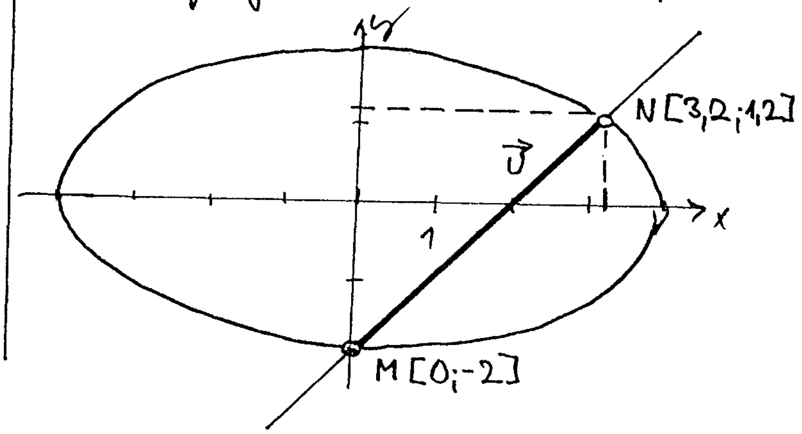
$x^2+4x^2-16x+\cancel{16}=\cancel{16}$

$5x^2-16x=0$

$x(5x-16)=0 \Rightarrow x_1=0, \quad x_2=3{,}2$

Pro $x_1=0$ je $y_1=0-2=-2 \ldots M[0;-2]$

Pro $x_2=3{,}2$ je $y_2=3{,}2-2=1{,}2 \ldots N[3{,}2;1{,}2]$



$\vec{v} = N-M = (3{,}2;3{,}2)$

$|\vec{v}| = \sqrt{3{,}2^2+3{,}2^2} = \sqrt{20{,}48} \doteq 4{,}5$

Tětiva má přibližnou délku 4,5.

Příklad 15: Najděte rovnice tečen vedených k elipse $9x^2+25y^2-18x+100y-116=0$ z bodu $P[-4;7]$.

$9x^2-18x+25y^2+100y=116$

$9(x^2-2x)+25(y^2+4y)=116$

$9(\underline{x^2-2x+1}-1)+25(\underline{y^2+4y+4}-4)=116$

$9[(x-1)^2-1]+25[(y+2)^2-4]=116$

$9(x-1)^2-9+25(y+2)^2-100=116$

$9(x-1)^2+25(y+2)^2=225 \quad | \cdot \frac{1}{225}$

$\frac{9(x-1)^2}{225}+\frac{25(y+2)^2}{225}=1$

$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1}$$

$S[1;-2]$ (m, n)

$a^2=25$, $b^2=9$ $\quad P[-4;7]$ (x_0, y_0)

Postupujeme jako u tečen kružnice, dosadíme:

řešení

$$\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2}+\frac{(y_0-n)\cdot(y-n)}{b^2}=1$$

$$\frac{(-4-1)\cdot(x-1)}{25}+\frac{(7+2)\cdot(y+2)}{9}=1$$

$$\frac{-5(x-1)}{25}+\frac{9(y+2)}{9}=1$$

$$-\frac{(x-1)}{5}+(y+2)=1 \quad |\cdot 5$$

$$-x+1+5y+10=5$$

$$-x+5y+6=0$$

$\boxed{x=5y+6}$ dosadíme do původní rovnice elipsy

$$9(5y+6)^2+25y^2-18(5y+6)+100y-116=0$$

$$9(25y^2+60y+36)+25y^2-90y-108+100y-116=0$$

$$225y^2+540y+324+25y^2-90y-108+100y-116=0$$

$$250y^2+550y+100=0 \quad |:50$$

$$5y^2+11y+2=0$$

$$y_{1,2}=\frac{-11\pm 9}{10}=\begin{cases} y_1=-2 & \dots x_1=5\cdot(-2)+6=-4 \quad T_1[-4;-2] \\ y_2=-\frac{1}{5} & \dots x_2=5\cdot(-\frac{1}{5})+6=5 \quad T_2[5;-\frac{1}{5}] \end{cases}$$

T_1, T_2 do rovnice tečny elipsy, kde $a^2=25, b^2=9$

$$\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2}+\frac{(y_0-n)\cdot(y-n)}{b^2}=1$$

a) $$\frac{(-4-1)\cdot(x-1)}{25}+\cancel{\frac{(-2+2)\cdot(y+2)}{9}}=1 \rightarrow \frac{-5(x-1)}{25}=1 \quad |\cdot 25$$

$$-5x+5=25$$

$$-5x=20$$

$$x=-4$$

Rovnice tečny elipsy v bodě T_1 je $x=-4$.

b) $$\frac{(5-1)\cdot(x-1)}{25}+\frac{(-\frac{1}{5}+2)\cdot(y+2)}{9}=1 \dots \text{podobně vyjde}$$

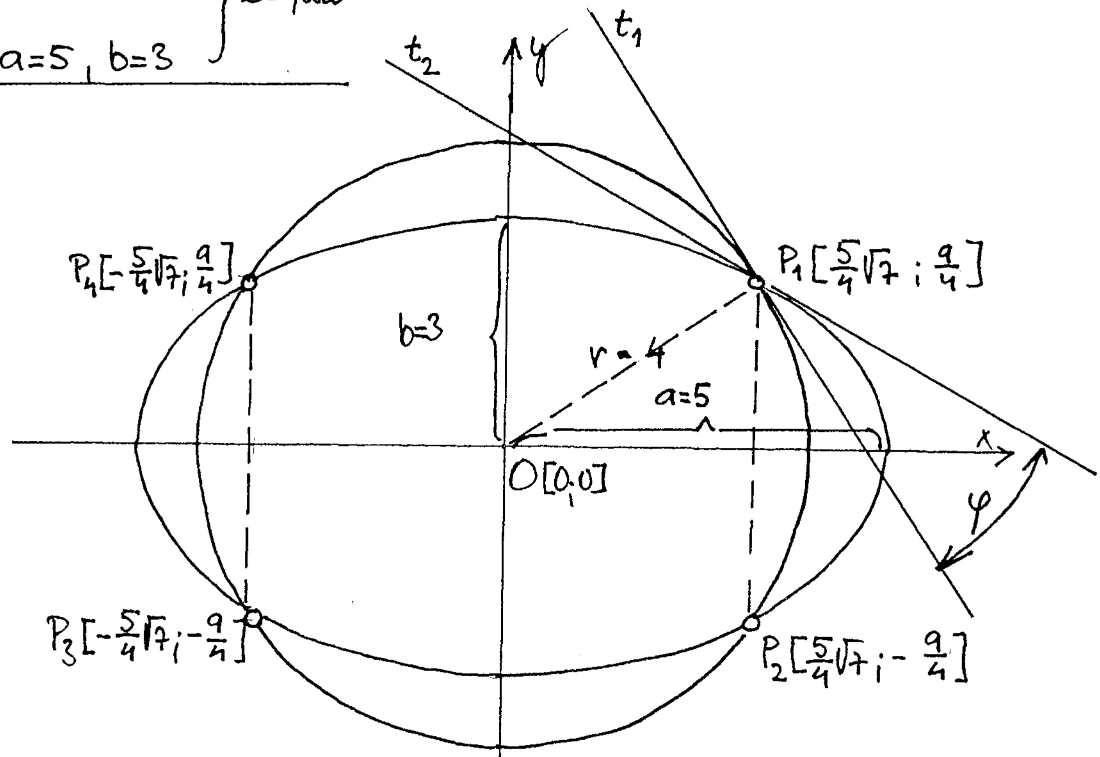
$4x+5y-19=0$, což je rovnice tečny elipsy v bodě T_2.

Příklad 16 (vlastní): Napište rovnice tečen křivek daných rovnicemi: $9x^2+25y^2=225$, $x^2+y^2=16$ v jednom z jejich společných bodů a určete odchylku těchto tečen.

$9x^2+25y^2=225 \quad | \cdot \frac{1}{225}$

$\left.\begin{aligned}&\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\\&a=5,\ b=3\end{aligned}\right\}$ elipsa

$\left.\begin{aligned}&x^2+y^2=16\\&r=4\end{aligned}\right\}$ kružnice



Průsečíky obou křivek určíme vyřešením soustavy rovnic:

$x^2+y^2=16$

$9x^2+25y^2=225$

$x^2=16-y^2$

$9\cdot(16-y^2)+25y^2=225$

$144-9y^2+25y^2=225$

$16y^2=81$

$y^2=\frac{81}{16}$

$y=\pm\frac{9}{4} \quad \begin{cases} y_1=\frac{9}{4}\\ y_2=-\frac{9}{4}\end{cases}$

Pro $y_1=\frac{9}{4}$ je $x^2=16-\frac{81}{16}=\frac{175}{16}=\frac{7\cdot 25}{16}$

$x_{1,2}=\pm\frac{5}{4}\sqrt{7} = \begin{cases} x_1=\frac{5}{4}\sqrt{7}\\ x_2=-\frac{5}{4}\sqrt{7}\end{cases}$

$P_1[\frac{5}{4}\sqrt{7}; \frac{9}{4}]$, $P_2[\frac{5}{4}\sqrt{7}; -\frac{9}{4}]$

$P_3=[-\frac{5}{4}\sqrt{7}; -\frac{9}{4}]$, $P_4[-\frac{5}{4}\sqrt{2}; \frac{9}{4}]$

Tečna t_1 kružnice v bodě $P_1[\underbrace{\frac{5}{4}\sqrt{7}}_{x_0}; \underbrace{\frac{9}{4}}_{y_0}]$ se středem $O[0;0]$ má rovnici $x\cdot x_0+y\cdot y_0=r^2$

$x\cdot\frac{5}{4}\sqrt{7}+y\cdot\frac{9}{4}=16 \quad |\cdot 4$

$\boxed{t_1:\ 5\sqrt{7}\,x + 9y - 64 = 0}$ ... tečna kružnice

$\vec{n}t_1 = (5\sqrt{7};\, 9)$ ... $\vec{u}t_1 = (-9;\, 5\sqrt{7})$ ... $|\vec{u}t_1| = \sqrt{81 + 25\cdot 7} = \sqrt{256} = 16$

Tečna t_2 elipsy v bodě $P_1[\frac{5}{4}\sqrt{7};\, \frac{9}{4}]$ se středem $O[0;0]$ má rovnici:

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

$$\frac{x\cdot\frac{5}{4}\sqrt{7}}{25} + \frac{y\cdot\frac{9}{4}}{9} = 1$$

$$\frac{\frac{5\sqrt{7}}{4}}{\frac{25}{1}}\,x + \frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{1}} \cdot = 1$$

$$\frac{5\sqrt{7}}{100}\,x + \frac{1}{4}\,y = 1 \quad |\cdot 100$$

$\boxed{t_2:\ 5\sqrt{7}\,x + 25y - 100 = 0}$ tečna elipsy

lze ještě dělit

$\vec{n}t_2 = (5\sqrt{7};\, 25)$

$\vec{u}t_2 = (-25;\, 5\sqrt{7})$

$|\vec{u}t_2| = \sqrt{25\cdot 7 + 625} = \sqrt{800} = 20\sqrt{2}$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}t_1\cdot\vec{u}t_2|}{|\vec{u}t_1|\cdot|\vec{u}t_2|} = \frac{|(-9;5\sqrt{7})\cdot(-25;5\sqrt{7})|}{16\cdot 20\sqrt{2}} = \frac{|225 + 25\cdot 7|}{320\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{|400|}{320\sqrt{2}} = \frac{5}{4\cdot\sqrt{2}} \doteq 0{,}883\,883\,476 \Rightarrow \boxed{\varphi \doteq 27^\circ 53'}$$

Poznámka: Velikost úhlu φ lze počítat též pomocí normálových vektorů.

Příklad 17:

Zjistěte, zda a) $V[x,y]: 4x^2+25y^2-24x-100y+36=0$

b) $V[x,y]: 4x^2+9y^2-24x-18y+9=0$

charakterizuje elipsu. V kladném případě určete její střed, vrcholy, ohniska a poloosy.

Řešení a)

$$4x^2-24x+25y^2-100y=-36$$
$$4(x^2-6x)+25(y^2-4y)=-36$$
$$4(\underline{x^2-6x+9}-9)+25(\underline{y^2-4y+4}-4)=-36$$
$$4[(x-3)^2-9]+25[(y-2)^2-4]=-36$$
$$4(x-3)^2\cancel{-36}+25(y-2)^2-100=\cancel{-36}$$
$$4(x-3)^2+25(y-2)^2=100 \quad \Big| \cdot \frac{1}{100}$$
$$\boxed{\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{4}=1}$$ je rovnice elipsy

$S[3;2]$ (m n)

$a^2=25$ $b^2=4$ $e^2=a^2-b^2$

$a=5$ $b=2$ $e^2=21$

$e=\sqrt{21}$

$A[m-a;n]$.. $A[-2;2]$

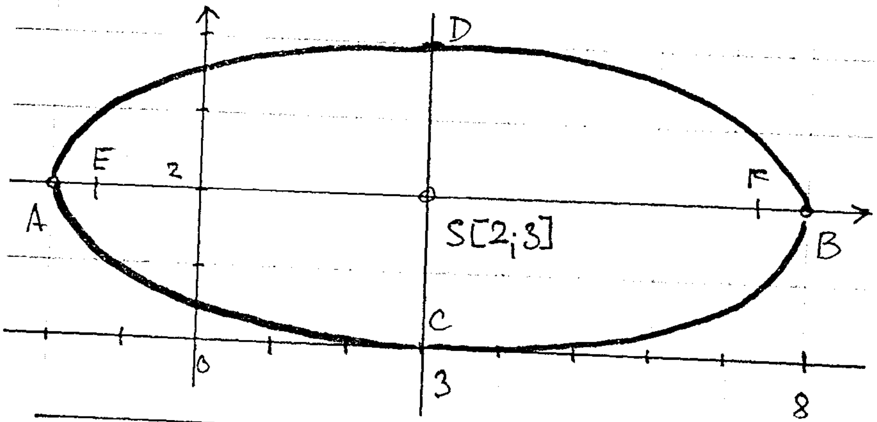
$B[m+a;n]$.. $B[8;2]$

$C[m;n-b]$.. $C[3;0]$

$D[m;n+b]$.. $D[3;4]$

$E[m-e;n]$.. $E[3-\sqrt{21};2]$

$F[m+e;n]$.. $F[3+\sqrt{21};2]$



Řešení b) $4x^2-24x+9y^2-18y+9=0$

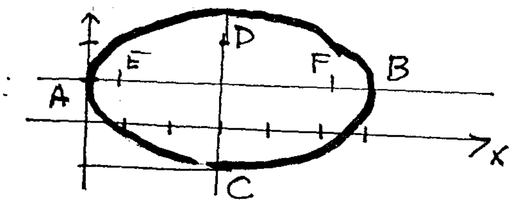
$$4((x^2-6x)+9(y^2-2y)=-9$$
$$4(\underline{x^2-6x+9}-9)+9(\underline{y^2-2y+1}-1)=-9$$
$$4[(x-3)^2-9]+9[(y-1)^2-1]=-9$$
$$4(x-3)^2-36+9(y-1)^2\cancel{-9}=\cancel{-9}$$
$$4(x-3)^2+9(y-1)^2=36 \quad \Big| \cdot \frac{1}{36}$$

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

$S[3;1]$, $a=3$, $b=2$, $e=\sqrt{5}$

$A[0;1]$, $B[6;1]$, $C[3;-1]$, $D[3;3]$

$E[3-\sqrt{5};1]$, $F[3+\sqrt{5};1]$



Příklad 18: Je dána elipsa $25x^2+56y^2=10$ a přímka p: $y=3x+2$. Určete tečnu elipsy rovnoběžnou s přímkou p.

Přímka $y=3x+2$ má směrnici $k=3$. Libovolná přímka s ní rovnoběžná má rovnici $y=3x+c$. Hledáme společné body této přímky a dané elipsy. Ty získáme vyřešením soustavy rovnic

$$y=3x+c \quad (*)$$
$$25x^2+56y^2=10$$
$$25x^2+56(3x+c)^2=10$$
$$25x^2+56(9x^2+6cx+c^2)-10=0$$
$$25x^2+504x^2+336cx+56c^2-10=0$$
$$\underbrace{529}_{a}x^2+\underbrace{336c}_{b}x+\underbrace{56c^2-10}_{c}=0$$

→ Přímka p bude tečnou elipsy, když tato kvadratická rovnice má 1 kořen, tj., když $D=0$

$$D=b^2-4ac$$
$$(336c)^2-4\cdot 529\cdot(56c^2-10)=0$$
$$112896c^2-118496c^2+21160=0$$
$$-5600c^2=-21160$$
$$c^2=\frac{529}{140}$$
$$\underbrace{c=\pm\frac{23}{\sqrt{140}}=\pm\frac{23}{\sqrt{4.35}}=\pm\frac{23}{2\sqrt{35}}}_{\text{do } (*)}$$

$t_1=3x+\frac{23}{2\sqrt{35}}$
$t_2=3x-\frac{23}{2\sqrt{35}}$

Existují dvě tečny.

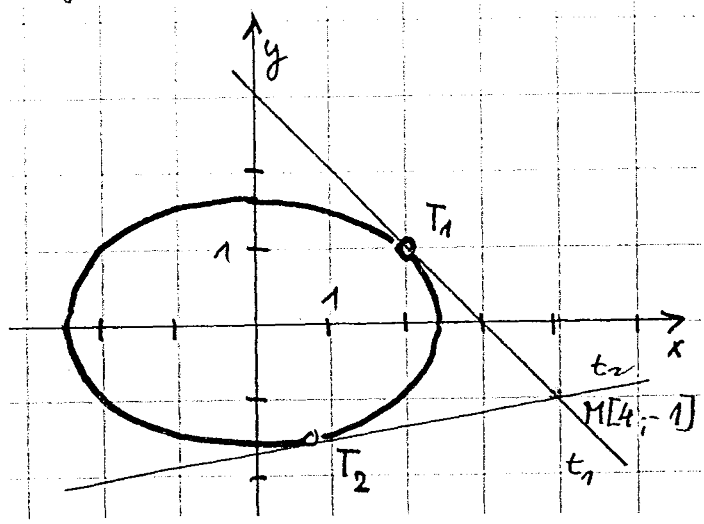
Příklad 19: Určete rovnice tečen vedených z bodu $M[4;-1]$ k elipse $3x^2+6y^2=18$

Řešení:

$$3x^2+6y^2=18 \quad \Big| \cdot \frac{1}{18}$$
$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1 \Rightarrow a=\sqrt{6},\ b=\sqrt{3}$$

Souřadnice bodu $M[\underset{x_0}{4};\underset{y_0}{-1}]$ dosadíme do rovnice tečny

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$



$$\frac{4x}{6} - \frac{y}{3} = 1 \quad | \cdot 6$$

$$4x - 2y = 6$$

$$-2y = -4x + 6 \quad | : (-2)$$

$$\boxed{y = 2x - 3}$$ dosadíme do rovnice elipsy:

$$3x^2 + 6(2x-3)^2 = 18$$

$$3x^2 + 6(4x^2 - 12x + 9) = 18$$

$$3x^2 + 24x^2 - 72x + 54 - 18 = 0$$

$$27x^2 - 72x + 36 = 0 \quad | : 9$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = -\frac{5}{3}$$

$\rightarrow T_1[2; 1], \quad T_2\left[\frac{2}{3}; -\frac{5}{3}\right]$

T_1, T_2 dosadíme do rovnice tečny

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

$$t_1: \frac{2x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \quad | \cdot 6$$

$$2x + 2y = 6$$

$$x + y = 3$$

$$t_1: \boxed{y = -x + 3}$$

$$t_2: \frac{\frac{2}{3}x}{6} + \frac{-\frac{5}{3}y}{3} = 1$$

$$\frac{\frac{2x}{3}}{\frac{6}{1}} + \frac{-\frac{5y}{3}}{\frac{3}{1}} = 1$$

$$\frac{2x}{18} - \frac{5y}{9} = 1 \quad | \cdot 18$$

$$2x - 10y = 18$$

$$x - 5y = 9$$

$$-5y = -x + 9$$

$$t_2: \boxed{y = \frac{1}{5}x - \frac{9}{5}}$$