4.5 Průsečík dvou přímek

① Určete průsečík přímek p, q, je-li:

a) $p: x = 5-3t \quad |\cdot 5$ $\qquad q: x = 1+t \quad |\cdot(-3)$

$y = 2+5t \quad |\cdot 3$ $\qquad y = -2+3t$

$5x = 25-15t$ $\qquad -3x = -3-3t$

$3y = 6+15t$ $\qquad y = -2+3t$

$\boxed{5x+3y=31}$ $\qquad \boxed{-3x+y=-5}$

přepíšeme jako soustavu rovnic

$5x+3y=31 \quad |\cdot 3$

$-3x+y=-5 \quad |\cdot 5$

$15x+9y=93$

$-15x+5y=-25$

$14y=68 \quad |:14$

$\boxed{y=\frac{34}{7}}$

$5x+3\cdot\frac{34}{7}=31$

$5x=\frac{115}{7} \quad |\cdot\frac{1}{5}$

$\boxed{x=\frac{23}{7}}$

$P\left[\frac{23}{7}; \frac{34}{7}\right]$

b) $p: 3y+2x-5=0$

$q: 4x+7y-11=0$ upravíme

$2x+3y=5 \quad |\cdot(-2)$

$4x+7y=11$

$-4x-6y=-10$

$4x+7y=11$

$\boxed{y=1}$

$4x+7\cdot 1=11$

$4x=4$

$\boxed{x=1}$

$P[1;1]$

c) $p: y=4x+3$ $\qquad q: y=\frac{1}{2}x-4$

$y=y$

$4x+3=\frac{1}{2}x-4$

$3{,}5x=-7$

$\boxed{x=-2}$

$y=4\cdot(-2)+3$

$\boxed{y=-5}$

$P[-2;-5]$

② Ověřte, že trojice průsečíků určených přímkami $p: x-3y+1=0$, $q: 2x+y+7=0$ a $r: 2x-4y-1=0$ tvoří vrcholy pravoúhlého △.

Označme $p \cap q = \{A\}$: $x-3y+1=0 \quad |\cdot(-2)$

$2x+y+7=0$

$-2x+6y-2=0$

$2x+y+7=0$

$7y=-5$

$y=-\frac{5}{7}$

$2x-\frac{5}{7}+7=0$

$2x=-\frac{44}{7} \quad |\cdot\frac{1}{2}$

$x=-\frac{22}{7}$

$a_1 \quad a_2$

$A\left[-\frac{22}{7}; -\frac{5}{7}\right]$

$p \cap r = \{B\} \ldots \; x - 3y + 1 = 0 \quad | \cdot (-2)$

$\underline{2x - 4y - 1 = 0}$

$-2x + 6y - 2 = 0$

$\underline{2x - 4y - 1 = 0}$

$2y = 3$

$y = \frac{3}{2}$

$2x - 4 \cdot \frac{3}{2} - 1 = 0$

$2x = 7$

$x = \frac{7}{2}$

$\underline{B\left[\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right]}$

$\quad b_1 \quad b_2$

$q \cap r = \{C\} \ldots \; 2x + y + 7 = 0$

$\underline{2x - 4y - 1 = 0 \quad | \cdot (-1)}$

$2x + y + 7 = 0$

$\underline{-2x + 4y + 1 = 0}$

$5y = -8$

$y = -\frac{8}{5} \quad \ldots \quad 2x - \frac{8}{5} + 7 = 0$

$2x = -\frac{27}{5} \quad | \cdot \frac{1}{2}$

$x = -\frac{27}{10}$

$\underline{C\left[-\frac{27}{10}; -\frac{8}{5}\right]}$

$\quad c_1 \quad c_2$

$$|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}+\frac{22}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}+\frac{5}{7}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{93}{14}\right)^2 + \left(\frac{15}{14}\right)^2} = \sqrt{\frac{4837}{98}}$$

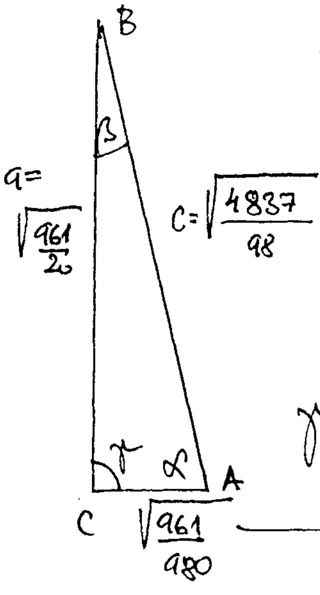
$$|AC| = \sqrt{(c_1-a_1)^2 + (c_2-a_2)^2} = \sqrt{\left(-\frac{27}{10}+\frac{22}{7}\right)^2 + \left(-\frac{8}{5}+\frac{5}{7}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{31}{70}\right)^2 + \left(-\frac{31}{35}\right)^2} = \sqrt{\frac{961}{980}}$$

$$|BC| = \sqrt{(c_1-b_1)^2 + (c_2-b_2)^2} = \sqrt{\left(-\frac{27}{10}-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(-\frac{8}{5}-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{31}{5}\right)^2 + \left(-\frac{31}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{961}{20}}$$

$$|AC|^2 + |BC|^2 = \left(\sqrt{\frac{961}{980}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{961}{20}}\right)^2 = \frac{961}{980} + \frac{961}{20} = \frac{4805}{98}$$

$$|AB|^2 = \left(\sqrt{\frac{4837}{98}}\right)^2 = \frac{4837}{98}$$

nepatrná odchylka je $\Rightarrow \triangle$ není zcela pravoúhlý … při výpočtu úhlů $\triangle ABC$ se to však neprojeví.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{\frac{961}{20}}}{\sqrt{\frac{961}{180}}} = \sqrt{\frac{\frac{961}{20}}{\frac{961}{180}}} = \sqrt{\frac{980}{20}} = \sqrt{49} = 7 \Rightarrow$$

$$\alpha \doteq 81°\,52'\,11{,}63''$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{\frac{961}{980}}}{\sqrt{\frac{961}{20}}} = \sqrt{\frac{961 \cdot 20}{961 \cdot 980}} = \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\beta \doteq 8°\,7'\,48{,}37''$$

$$\gamma = 180° - (81°\,52'\,11{,}63'' + 8°\,7'\,48{,}37'')$$

$\gamma = 90°$ $\Rightarrow$ $\triangle ABC$ lze považovat za pravoúhlý

③ Dokažte (lépe zdůvodněte), že přímky $2x+3y+1=0$, $3x-y-4=0$, $5x+4y-1=0$ se protínají v jednom bodě.

Označme:

$p: 2x+3y+1=0$

$q: 3x-y-4=0$

$r: 5x+4y-1=0$

$p \cap q = \{A\} \dots$

$$\begin{aligned} 2x+3y+1&=0 \\ 3x-y-4&=0 \quad /\cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x+3y+1&=0 \\ 9x-3y-12&=0 \end{aligned}$$

$11x=11$

$\boxed{x=1}$

$3\cdot 1-y-4=0$

$\boxed{y=-1}$

$A[1;-1]$

$p \cap r = \{B\} \dots$

$$\begin{aligned} 2x+3y+1&=0 \quad /\cdot(-5) \\ 5x+4y-1&=0 \quad /\cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -10x-15y-5&=0 \\ 10x+8y-2&=0 \end{aligned}$$

$-7y=-7$

$\boxed{y=-1}$

$2x+3\cdot(-1)+1=0$

$2x=2$

$\boxed{x=1}$

$B[1;-1]$

$q \cap r = \{C\} \dots$

$$\begin{aligned} 3x-y-4&=0 \quad /\cdot 4 \\ 5x+4y-1&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12x-4y-16&=0 \\ 5x+4y-1&=0 \end{aligned}$$

$17x=17$

$\boxed{x=1}$

$5\cdot 1+4y-1=0$

$4y=-4$

$\boxed{y=-1}$

$C[1;-1]$

Platí: $A=B=C[1;-1]$ ... $\boxed{P[1;-1]}$

④ Určete číslo b tak, aby přímka $3x-by+4=0$ procházela průsečíkem přímek $4x-3y-14=0$ a $x+y=0$.

$$\begin{aligned} 4x-3y-14&=0 \\ x+y&=0 \end{aligned}$$

$x=-y$

$4\cdot(-y)-3y-14=0$

$-7y=14$

$\boxed{y=-2}$

$x=-(-2) \rightarrow \boxed{x=2}$

$P[2;-2]$

$3x-by+4=0$, dosaď P

$3\cdot 2-b\cdot(-2)+4=0$

$6+2b+4=0$

$2b=-10$

$\boxed{b=-5}$

⑤ Napište rovnici přímky, která prochází bodem $A[-4;7]$ a průsečíkem přímek $x-7y+5=0$ a $y=x-1$.

$x-7y+5=0$

$y=x-1$

$x-7(x-1)+5=0$

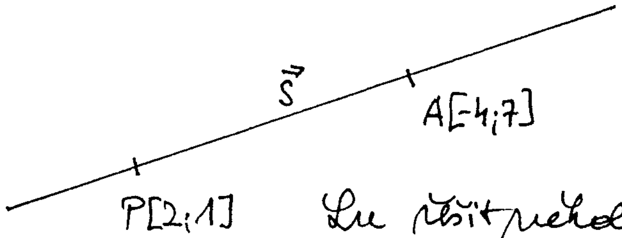
$x-7x+7+5=0$

$-6x=-12$

$\boxed{x=2}$

$y=2-1 \ldots \boxed{y=1}$

$P[2;1]$



Lze řešit několika postupy, například:

$\vec{s}=A-P=(-4-2;7-1)=(-6;6)$

$x=2-6t$

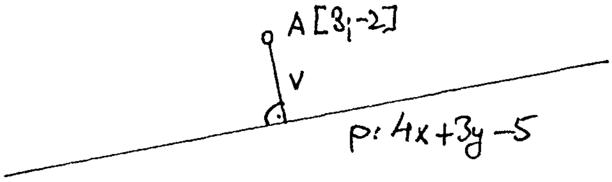
$y=1+6t$

$x+y=3 \rightarrow \boxed{x+y-3=0}$

---

⑥ Určete vzdálenost bodu $A[3;-2]$ od přímky:

a) $4x+3y-5=0$ b) $3x-4y+10=0$



Řešení a)

$A[x_0, y_0]$ $p: 4x+3y-5=0$

$A[3;-2]$ $p: ax+by+c=$

$$|A;p|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|4\cdot 3+3\cdot(-2)-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|12-6-5|}{\sqrt{25}}=\frac{|1|}{5}=\boxed{\frac{1}{5}}$$

Řešení b)

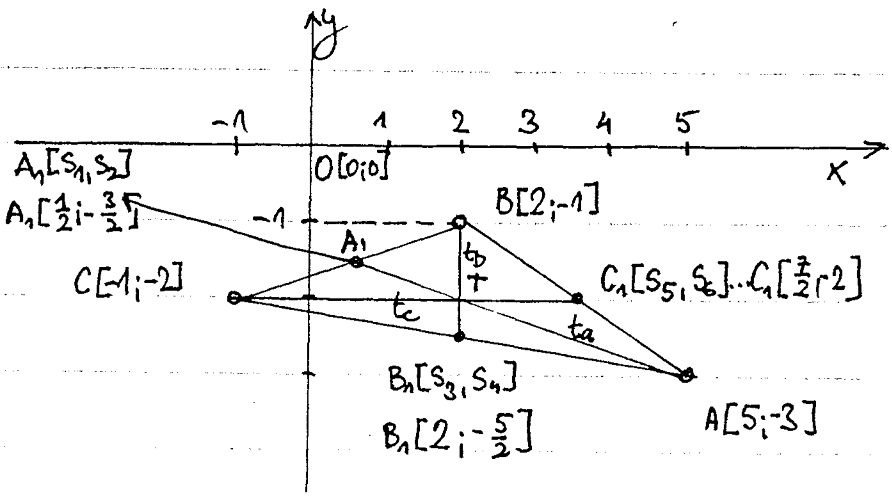
$$|A;p|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3\cdot 3-4\cdot(-2)+10|}{5}=\frac{|9+8+10|}{5}=\frac{|27|}{5}=\boxed{\frac{27}{5}}$$

---

⑦ V $\triangle ABC$ s vrcholy $A[5;-3]$, $B[2;-1]$, $C[-1;-2]$ vypočítejte průsečík těžnic, tzv. těžiště.

$S_1=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$, $S_2=\frac{-2-1}{2}=-\frac{3}{2}$ | $S_3=\frac{-1+5}{2}=2$, $S_4=\frac{-2-3}{2}=-\frac{5}{2}$

$A_1\left[\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right]$, $B_1\left[2;-\frac{5}{2}\right]$ obdobně $C_1\left[\frac{7}{2};-2\right]$



Souřadnice těžiště T stačí určit jako průsečík dvou přímek, které obsahují těžnice, např. ta a tc.

$t_a \dots \ \vec{s}_a = A_1 - A = \left(\frac{1}{2} - 5; -\frac{3}{2} + 3\right) = \left(-\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$

$t_a \dots \ x = 5 - \frac{9}{2}t$

$y = -3 + \frac{3}{2}t \quad | \cdot 3$

$x = 5 - \frac{9}{2}t$

$3y = -9 + \frac{9}{2}t$

$\boxed{x + 3y = -4}$

$t_c \dots \ \vec{s}_c = (C_1 - C) = \left(\frac{7}{2} + 1; -2 + 2\right) = \left(\frac{9}{2}; 0\right)$

$x = -1 + \frac{9}{2}t$

$y = -2 + 0t$

Protože ve 2. rovnici není výraz s t, tak musím 1. rovnici násobit nulou, a t zmizí.

$\Rightarrow y = -2$

$x + 3y = -4$

$y = -2$

$x + 3\cdot(-2) = -4$

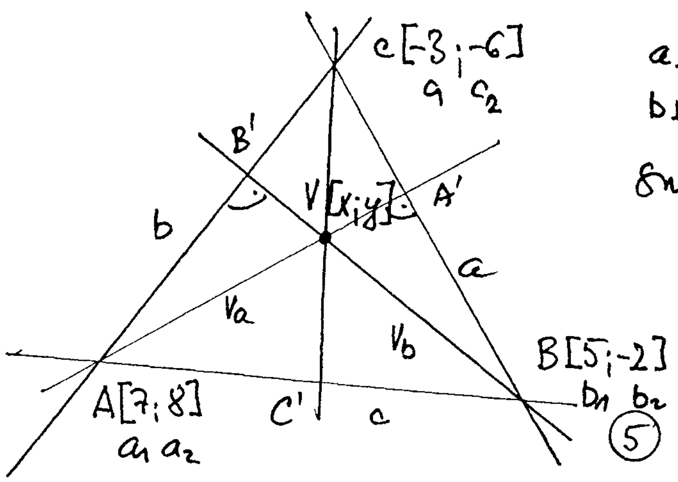
$x - 6 = -4$

$x = 2$

$\boxed{T[2;-2]}$

---

* 8 Určete průsečík výšek $\triangle ABC$, je-li: $A[7;8]$, $B[5;-2]$, $C[-3;-6]$.



$\left.\begin{array}{l} a \perp v_a \\ b \perp v_b \end{array}\right\}$ určíme rovnice přímek a, b a pomocí jejich směrnic určíme rovnice přímek v_a, v_b, potom jejich průsečík pomocí soustavy rovnic.

Přímka a pomocí bodů B,C:

$$y = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1}(x - b_1) + b_2$$

$$y = \frac{-6+2}{-3-5}(x-5) - 2$$

$$y = \frac{1}{2}(x-5) - 2$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} - 2$$

$$y = \boxed{\frac{1}{2}}x - \frac{9}{2}$$

↓

je směrnice k_a přímky a

$-\frac{1}{k_a} = -2$ je směrnice přímky v_a:

$$y = -\frac{1}{k_a} \cdot x + q$$

$y = -2x + q$, dosaď $A[7;8]$

$$8 = -2 \cdot 7 + q$$

$$q = 22$$

$\boxed{y = -2x + 22}$ je rovnice přímky v_a

Přímka b pomocí bodů A,C:

$$y = \frac{c_2 - a_2}{c_1 - a_1} \cdot (x - a_1) + a_2$$

$$y = \frac{-6-8}{-3-7}(x-7) + 8$$

$$y = \frac{7}{5}(x-7) + 8$$

$$y = \frac{7}{5}x - \frac{49}{5} + 8$$

$$y = \boxed{\frac{7}{5}}x - \frac{9}{5}$$

↓

je směrnice k_b přímky b

$-\frac{1}{k_b} = -\frac{5}{7}$ je směrnice přímky v_b

$$y = -\frac{1}{k_b} + q$$

$y = -\frac{5}{7}x + q$, dosaď $B[5;-2]$

$$-2 = -\frac{5}{7} \cdot 5 + q \rightarrow q = \frac{11}{7}$$

$\boxed{y = -\frac{5}{7}x + \frac{11}{7}}$ je rovnice přímky v_b

řeš jako soustavu

$$y = y$$

$$-2x + 22 = -\frac{5}{7}x + \frac{11}{7}$$

$$-\frac{9}{7}x = -\frac{143}{7}$$

$$9x = 143$$

$$x = \frac{143}{9}$$

$$y = -2 \cdot \frac{143}{9} + 22$$

$$y = -\frac{286}{9} + 22$$

$$y = -\frac{88}{9}$$

$$\boxed{V\left[\frac{143}{9}; -\frac{88}{9}\right]}$$

---

* 9) Na přímce $5x - y + 1 = 0$ najděte bod C, který je stejně vzdálen od bodů $A[3;2]$, $B[-1;4]$.

Hledaný bod C musí ležet na přímce $p: 5x-y+1=0$ $(y=5x+1)$ a na ose $\underline{o}$ úsečky AB.... $p \cap o = \{C\}$ nebo $C \in p \cap o$.

1) Označme střed úsečky AB písmenem O... $O[S_1,S_2]$. Platí:

$S_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$, $S_2 = \frac{4+2}{2} = 6$ ... $O[1;3]$

2) Určeme směrnici přímky AB proměnnou $\underline{k}$; $k = \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1} = \frac{4-2}{-1-3} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

3) Protože osa $\underline{o}$ je kolmá na přímku AB, tak má směrnici

$-\frac{1}{k} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$

4) Určeme rovnici osy $\underline{o}$: $y = -\frac{1}{k}x + q$

$y = 2x + q$, dosadíme $O[1;3]$

$3 = 2.1 + q$

$q = 1$ $\rightarrow$ $o: y = 2x+1$

5) Bod C určeme jako průsečík přímek $\underline{p}$ a $\underline{o}$.

$y = 5x+1$

$y = 2x+1$

$y = y$

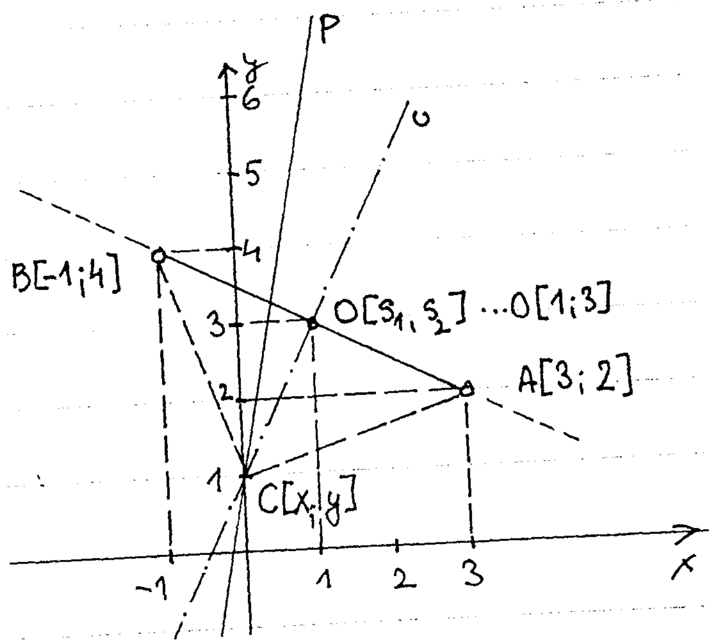
$5x+1 = 2x+1$

$3x = 0$

$\boxed{x=0}$

$y = 2.0+1$

$\boxed{y=1}$



$\boxed{C[0;1]}$

KONEC ČLÁNKU 4.5