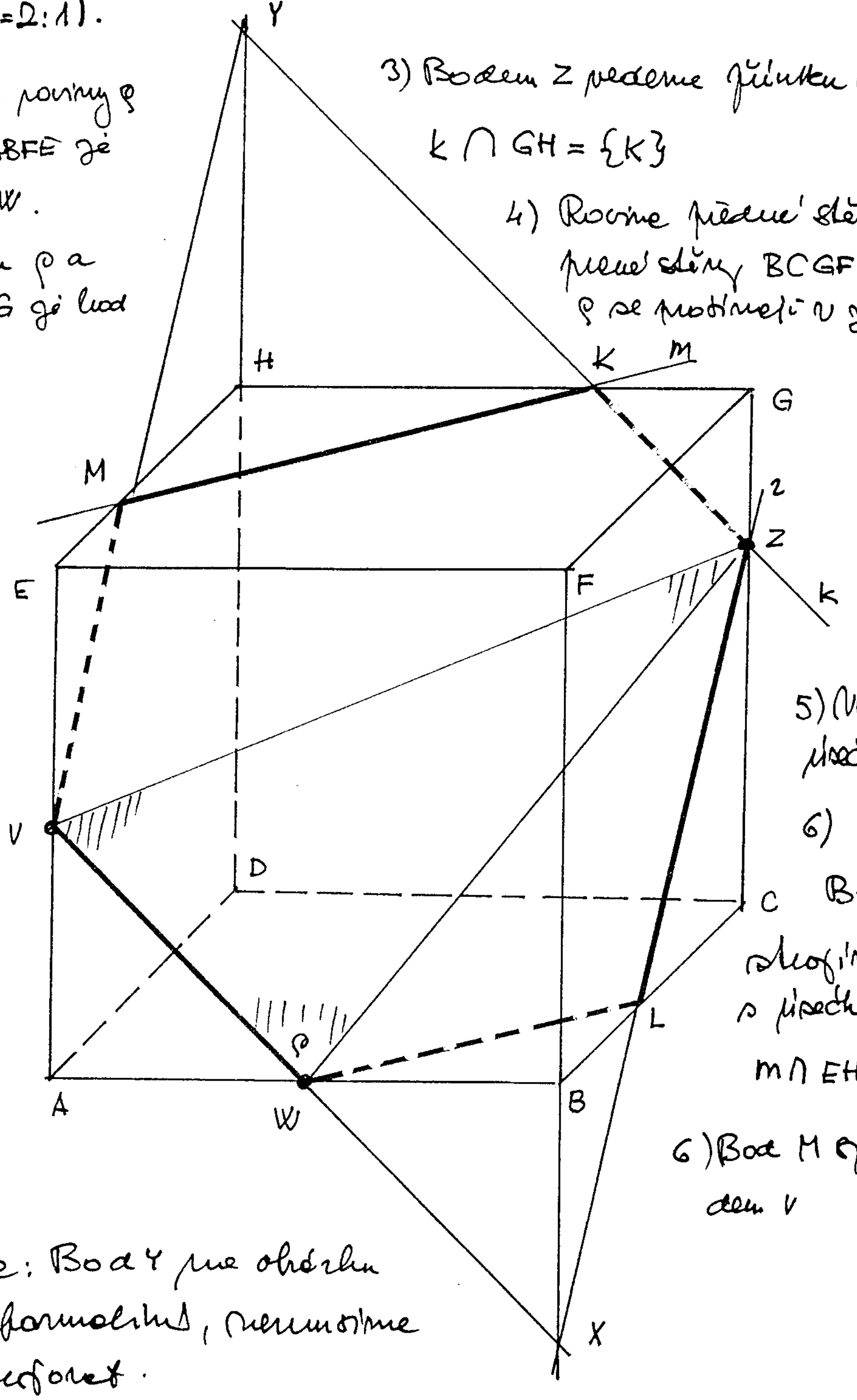
18 b) ŘEŠENÍ POLOHOVÝCH ÚLOH VE VOLNÉ PROJEKCI

a)

Příklad 1 (2140-uč.): Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou ρ určenou body V (střed hrany AE), W (střed hrany AB), Z (Z $\in$ CG, $|CZ|:|ZG| = 2:1$).

1) Průnikem roviny ρ a stěny ABFE je úsečka VW.

2) Průnikem ρ a hrany CG je bod Z.



3) Bodem Z vedeme přímku $k \parallel VW$.

$k \cap GH = \{K\}$

4) Roviny přední stěny ABFE, pravé stěny BCGF a roviny ρ se protínají v jediném bodě X. Bod X spojíme s bodem Z přímkou l.

$L \cap BC = \{L\}$

5) Vyznačíme úsečky WL, LZ.

6) Bodem K sestrojíme rovnoběžku m s přímkou WL.

$m \cap EH = \{M\}$

6) Bod M spojíme s bodem V.

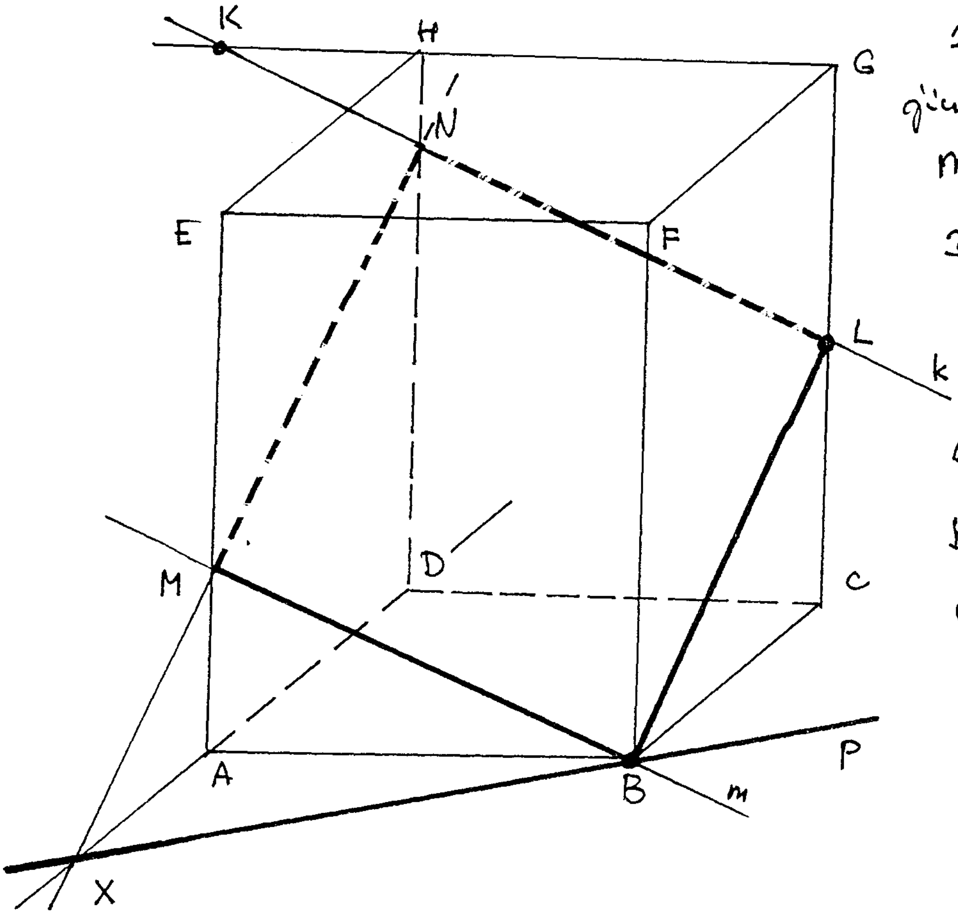
Poznámka: Bod Y na obrázku je jen informativní, nemusíme ho sestrojovat.

Průnik roviny ρ a krychle ABCDEFGH je šestiúhelník VWLZKM.

Příklad 2: a) Sestrojte řez kvádru ABCDEFGH rovinou $\overleftrightarrow{KLB}$, kde $K \in \overrightarrow{GH} \wedge |GK| = \frac{3}{2}|GH|$; b) Sestrojte průsečnici roviny ρ a rovinou podstavy ABC. (L je $\frac{1}{2}$ $|CG|$)

a) 1) Přímku $k = \overleftrightarrow{KL}$

$k \cap DH = \{N\}$



2) Přímka m procházející bodem B, $m \parallel \overleftrightarrow{NL}$.

$m \cap AE = \{M\}$

3) Vyznačíme úsečky MN a BL.

Řezem je rovnoběžník BLNM.

b) $\overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{AD} = \{X\}$

Přímka $p = \overleftrightarrow{BX}$ je požadovaná průsečnice.

Příklad 3 (3a 143 uč.) a) Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCDV rovinou ρ, která je určena přímkou p a bodem K; K je středem hrany DV; přímka p je rovnoběžná s přímkou AC a prochází bodem L, který je středem hrany AB.

1) Bodem L vedeme přímku l, $l \parallel AC$

$l \cap BC = \{O\}$

Rovina $\rho = \overleftrightarrow{LOK}$

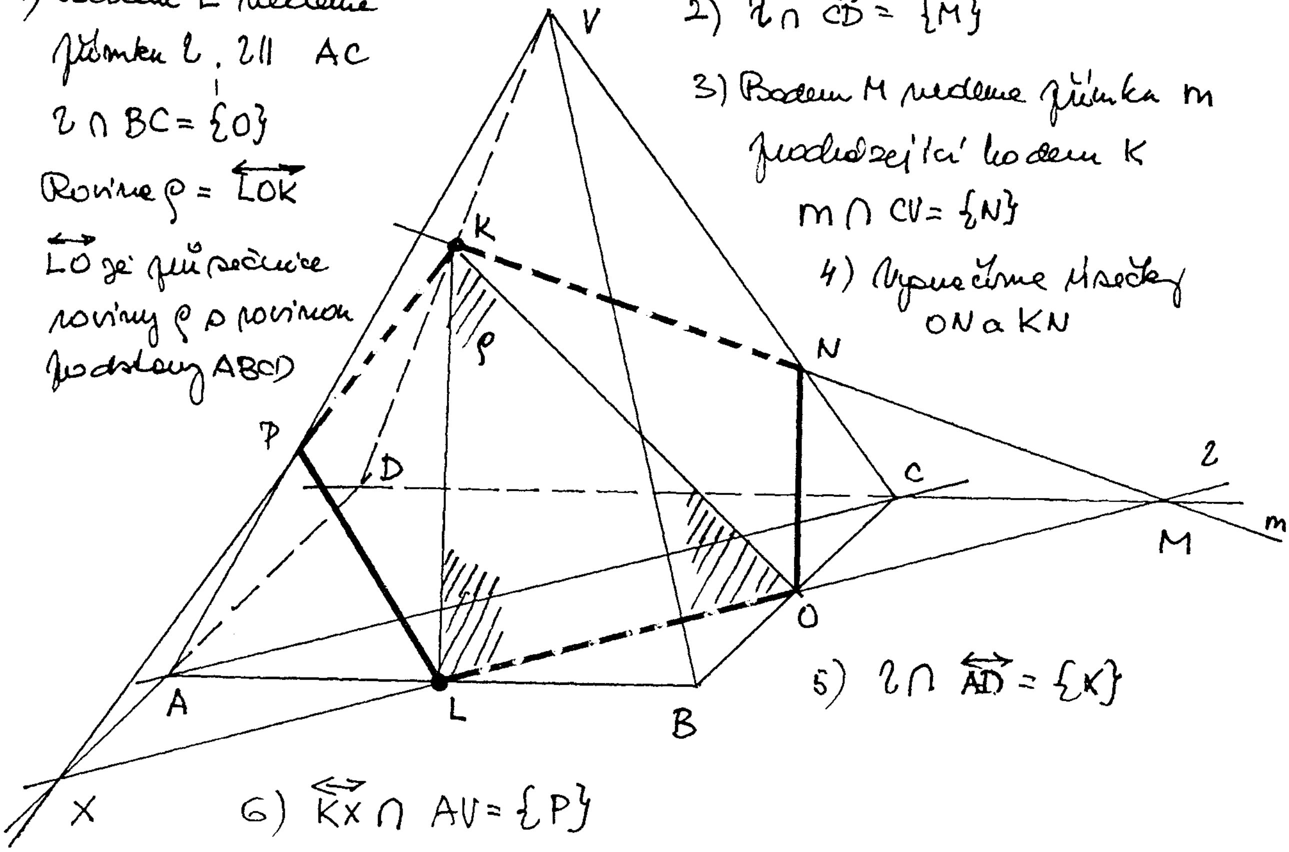
$\overleftrightarrow{LO}$ je průsečnice roviny ρ s rovinou podstavy ABCD

2) $l \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

3) Bodem M vedeme přímka m procházející bodem K

$m \cap CV = \{N\}$

4) Vyznačíme úsečky ON a KN



5) $l \cap \overleftrightarrow{AD} = \{K\}$

6) $\overleftrightarrow{KX} \cap AV = \{P\}$

7) Vyznačíme úsečky PK a PL.

<u>Průnik roviny ρ s jehlanem ABCDV je pětiúhelník LONKP.</u>

<u>Příklad 4</u> (4/145 – uč.): Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou XYZ, je-li bod X středem hrany AD, bod Y středem hrany BF a bod $Z \in HG$ $\wedge$ $|HZ| : |ZG| = 1 : 3$.

<u>Postup:</u>

1) Z', 2) $\overrightarrow{Z'B}$

3) $\overleftrightarrow{ZY}$, 4) $\overrightarrow{Z'B} \cap \overrightarrow{ZY} = \{M\}$

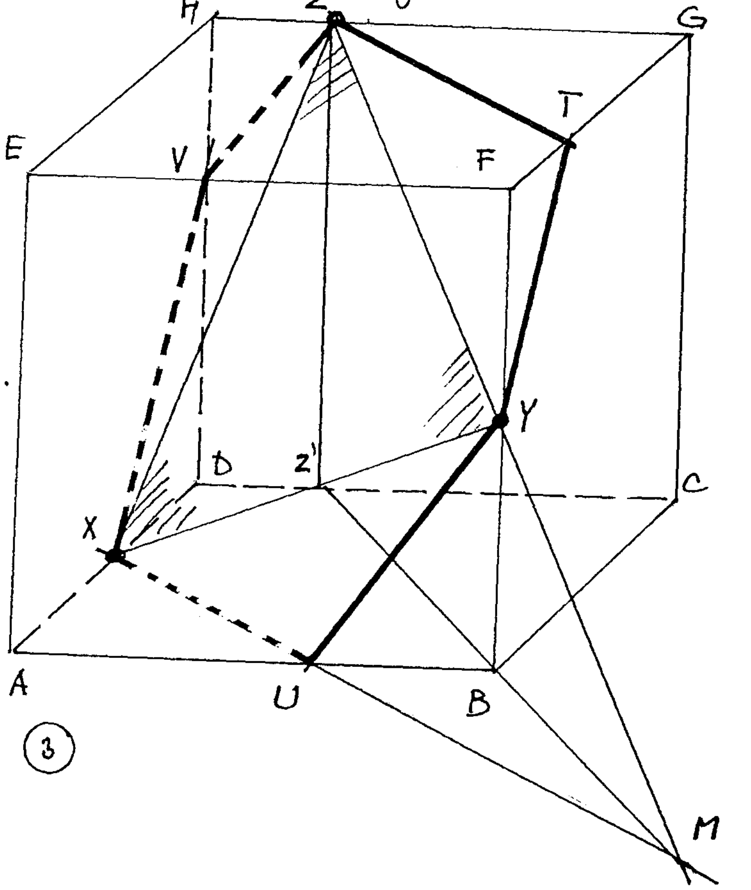
5) $\overleftrightarrow{MX} \cap AB = \{U\}$

6) Vyznačíme úsečky UY a UX.

7) $ZV \parallel UY$, vyznačíme ZV

8) $XU \parallel ZT$, vyznačíme ZT a pak TY

<u>Řešení je šestiúhelník UYTZVX.</u>



Příklad 5 (2.35c/50 uč):

Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou TRS, bod T je středem hrany FG, bod R je bodem polopřímky AB, $|AR| = \frac{5}{4}|AB|$, bod S je bodem polopřímky AE, $|AS| = \frac{3}{2}|AE|$.

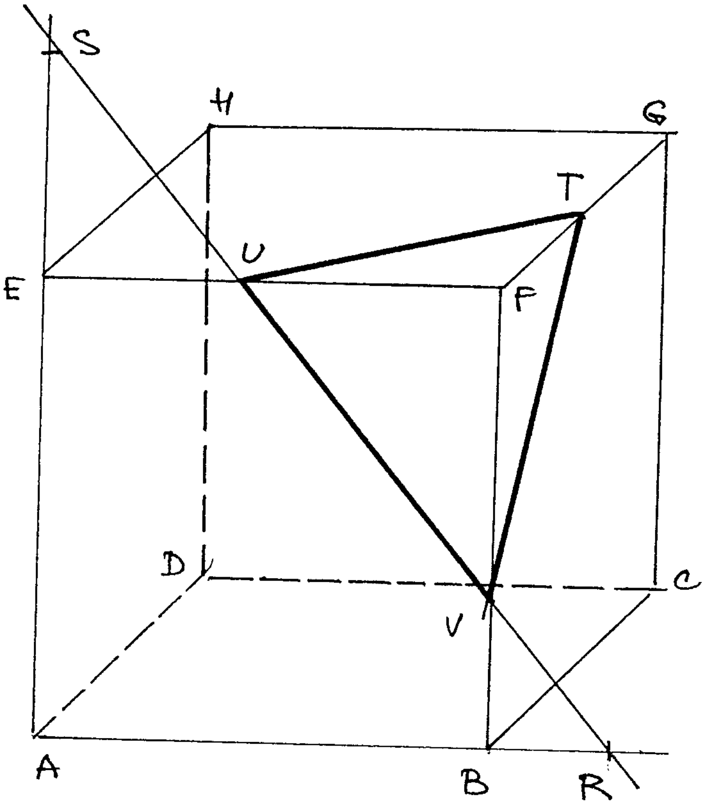
Postup:

1) $\overleftrightarrow{SR}$, $\overleftrightarrow{SR} \cap EF = \{U\}$

$\overleftrightarrow{SR} \cap BF = \{V\}$

2) Úsečky UV, TV, UT

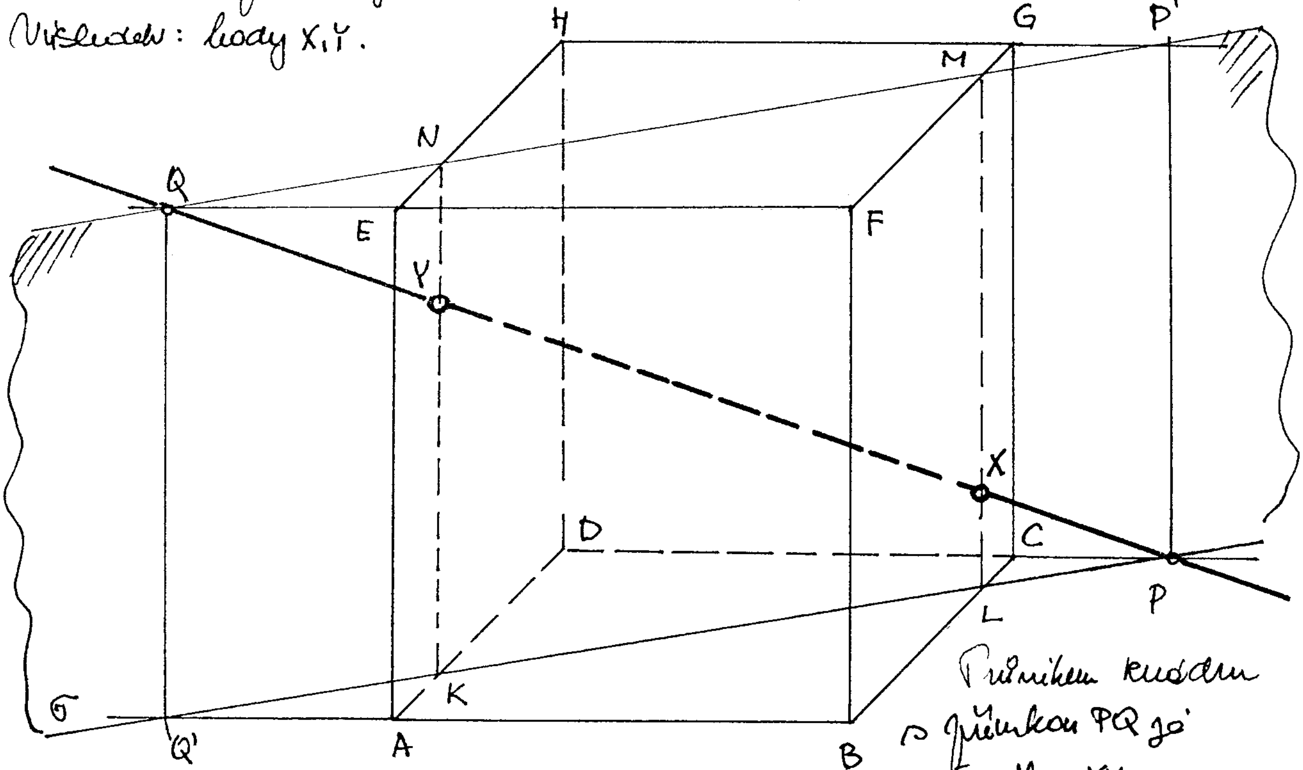
Řešení je $\triangle TUV$.



Příklad 6 (6146-uč.): Je dán kvádr ABCDEFGH se čtvercovou podstavou a přímka $p = \overleftrightarrow{PQ}$. Bod $P \in \overrightarrow{DC}$, $|DP| = \frac{4}{3}|CD|$, bod $Q \in \overrightarrow{FE}$, $|FQ| = \frac{3}{2}|EF|$. Sestrojte průsečíky přímky p s povrchem kvádru.

Řešení: Přímkou p vedeme rovinu $\sigma \parallel \overleftrightarrow{AE}$. $\overleftrightarrow{PQ'}$ je průsečnice roviny σ s rovinou podstavy. Řez kvádru rovinou σ je obdélník KLMN.

Výsledek: body X, Y.

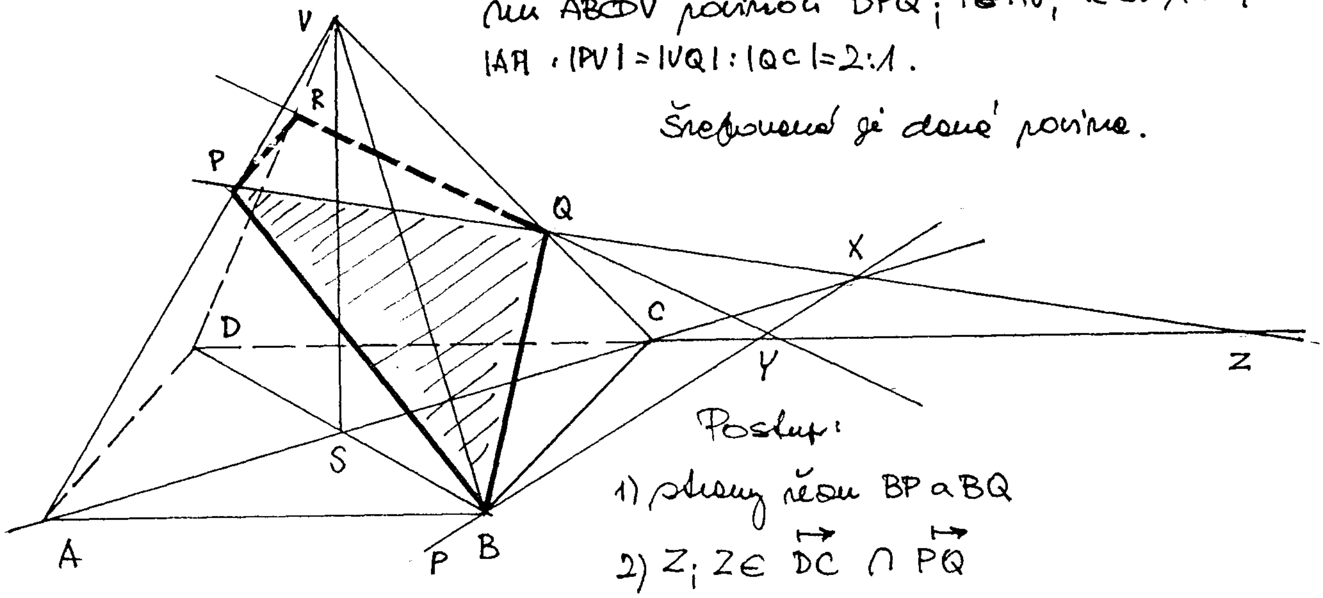


Průnikem kvádru s přímkou PQ je úsečka XY.

b)

Příklad 7 (2.41/51 uč.): Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCDV rovinou BPQ; P∈AV, Q∈CV tak, že $|AP| : |PV| = |VQ| : |QC| = 2:1$.

Šrafovaná je daná rovina.



Postup:

1) strany řezu BP a BQ

2) Z; $Z \in \overrightarrow{DC} \cap \overrightarrow{PQ}$

3) X; $X \in \overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{PQ}$ … 4) Y; $Y \in \overleftrightarrow{BX} \cap \overrightarrow{DC}$

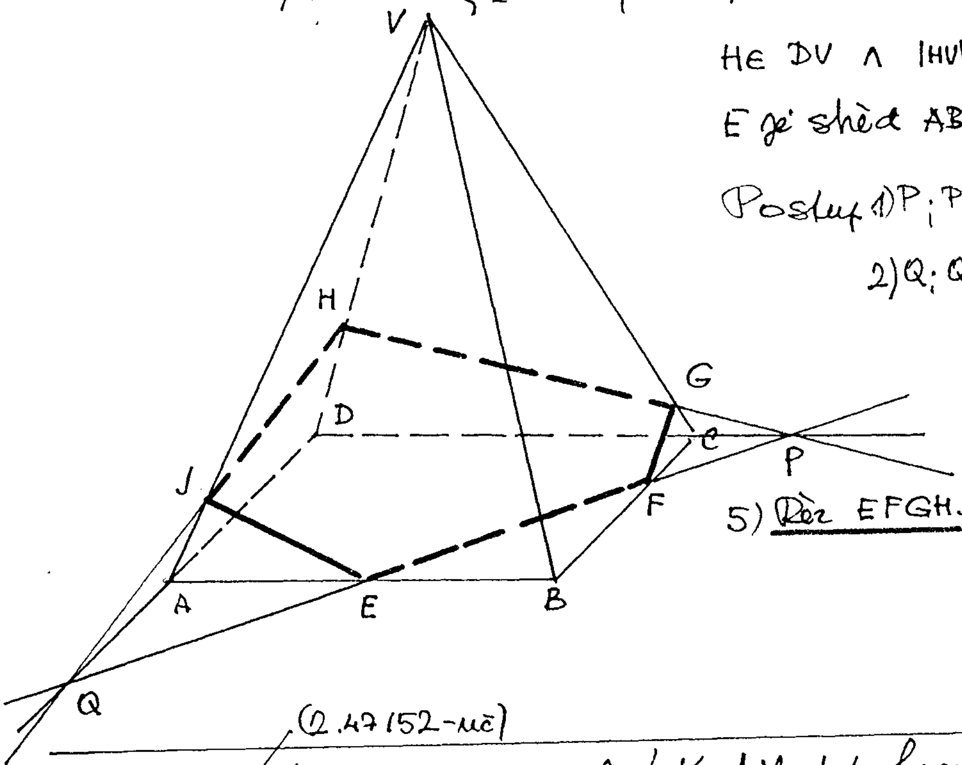
5) R; $R \in \overrightarrow{YQ} \cap DV$ … 6) PR; strana řezu ve stěně ADV

Řezem je čtyřúhelník BQRP.

Příklad 8: Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCDV rovinou $\rho = \overleftrightarrow{PHE}$, kde $P \in \overleftarrow{DC} \wedge |DP| = \frac{5}{4}|DC|$

$H \in DV \wedge |HV| = \frac{3}{4}|DV|$

E je střed AB



Postup 1) P; $P \in \overleftrightarrow{EP} \cap \overrightarrow{DC}$

2) Q; $Q \in \overleftrightarrow{EP} \cap \overrightarrow{DA}$

3) G; $G \in \overleftrightarrow{HP} \cap CV$

4) J; $J \in \overrightarrow{HQ} \cap AV$

5) Řez EFGHJ.

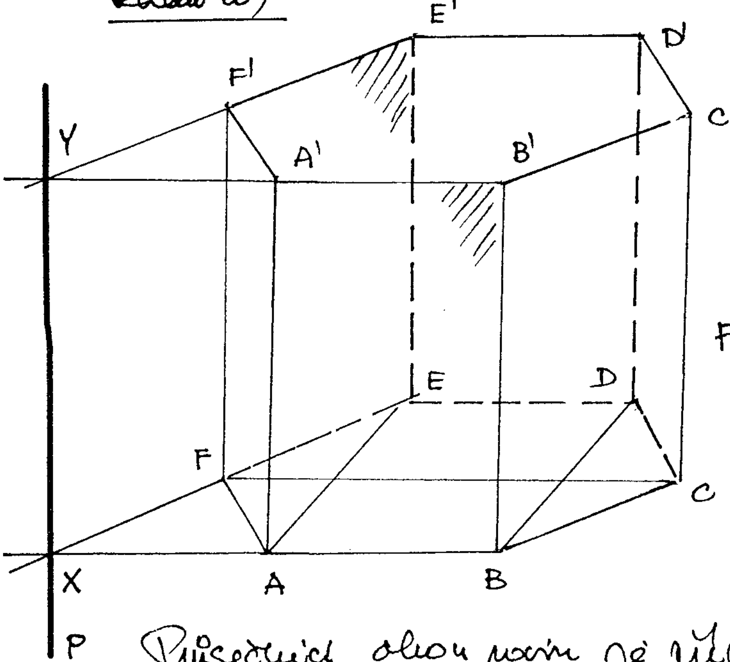
(2.47/52 - uč)

Příklad 9: Je dán pravidelný šestiboký hranol ABCDEFA'B'C'D'E'F'. Body M, N, P leží po řadě na hranách AA', BB', CC'; $|AM| = \frac{3}{4}|AA'|$, $|BN| = \frac{1}{3}|BB'|$, $|CP| = \frac{2}{3}|CC'|$. Sestrojte průsečnice rovin:

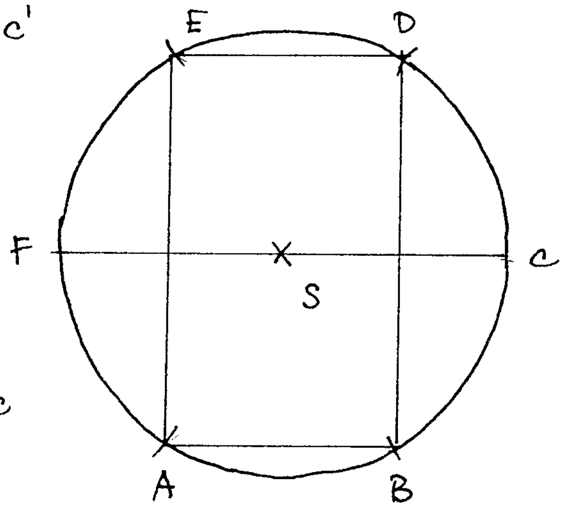
a) ABB', EFF'

b) A'B'C', MNP

Řešení a)



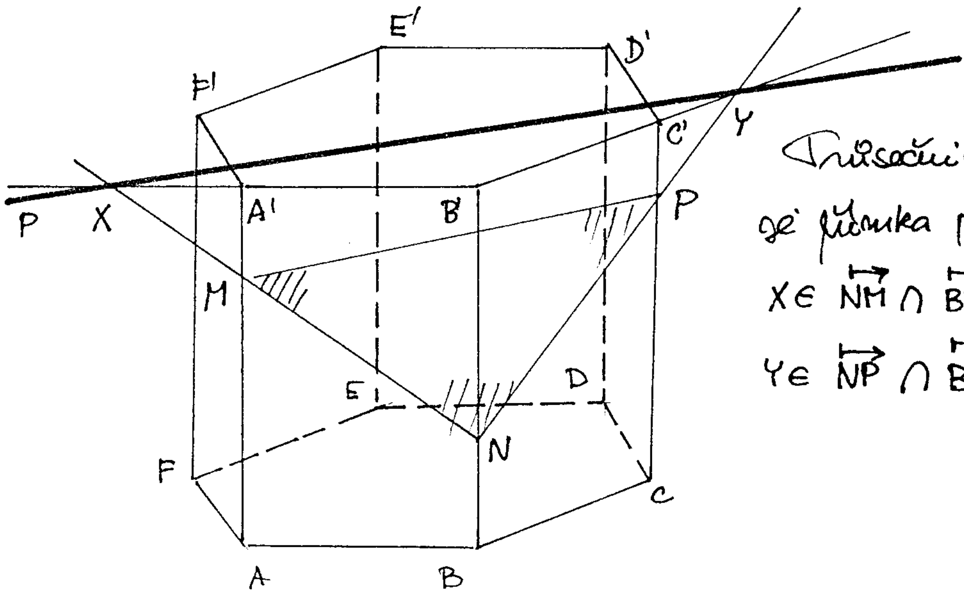
Pomocná konstrukce



Průsečnice obou rovin je přímka $XY = p$.

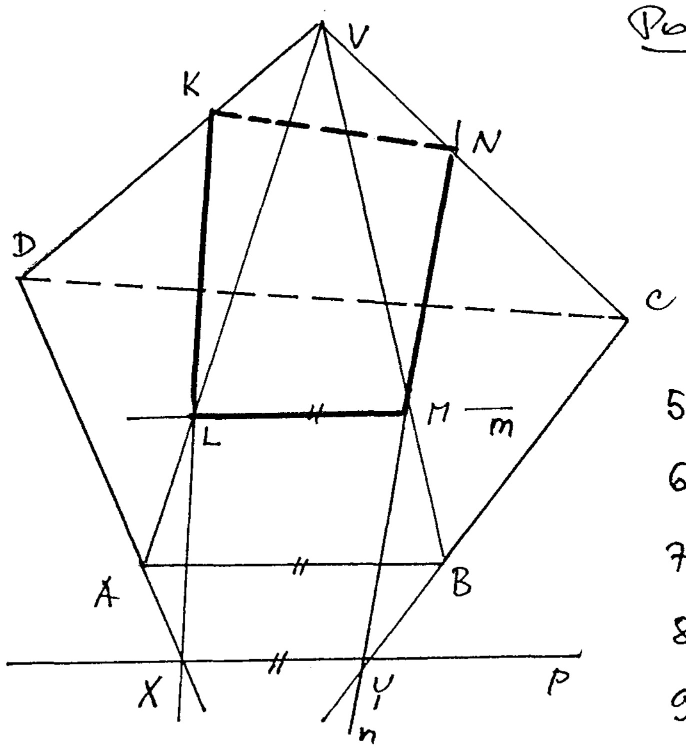
$p \parallel AA'$, $X \in \overrightarrow{BA} \cap \overleftrightarrow{EF}$, $Y \in \overrightarrow{B'A'} \cap \overrightarrow{E'F'}$

Řešení b)



Průsečnice obou rovin je přímka $p = \overleftrightarrow{XY}$, kde $X \in \overrightarrow{NM} \cap \overrightarrow{B'A'}$, $Y \in \overrightarrow{NP} \cap \overrightarrow{B'C'}$

Příklad 10: V rovině podstavy jehlanu ABCDV tvaru nepravidelného čtyřúhelníka je dána přímka p ($p \parallel AB$) a uvnitř hrany DV bod K. Sestrojte řez jehlanu rovinou pK. (Poznámka: Žádná dvojice podstavných hran neleží na rovnoběžných přímkách.)



Postup: 1) X; $X \in \overrightarrow{DA} \cap p$

2) L; $L \in \overrightarrow{KX} \cap AV$

3) vyznačíme stranu řezu KL

4) m; m prochází bodem L a platí $m \parallel p$

5) M; $M \in m \cap BV$

6) vyznačíme LM

7) Y; $Y \in \overrightarrow{CB} \cap p$

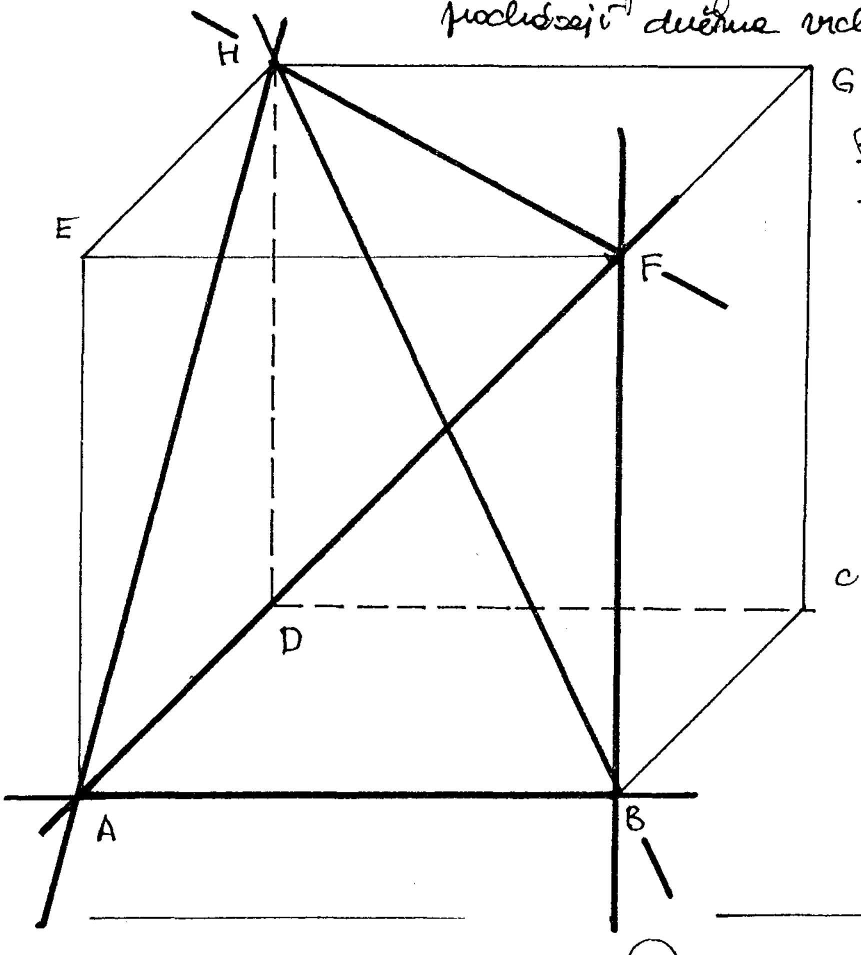
8) n; $n = \overleftrightarrow{MY}$

9) N; $N \in n \cap CV$

10) vyznačíme MN a KN

Řešení je čtyřúhelník KLMN.

Příklad 11 (8/48/uč.): Najděte příčky mimoběžek AH a BF, které procházejí dvěma vrcholy krychle ABCDEFGH.

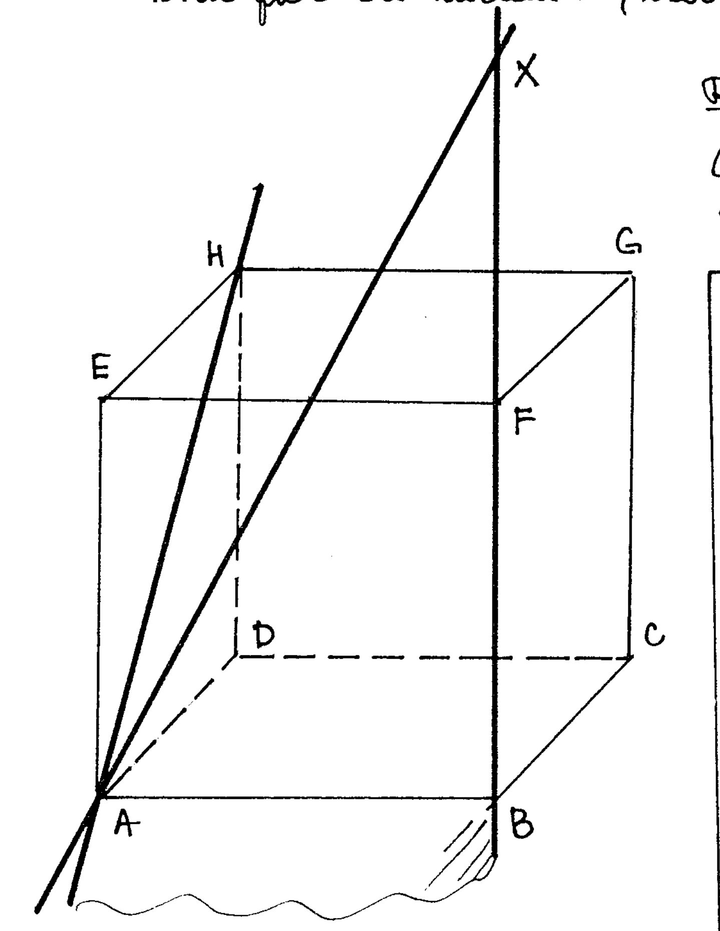


Řešení: Příčka mimoběžek je jakákoli přímka, která spojuje dva body mimoběžek (1. bod je na jedné, 2. bod je na druhé mimoběžce).

V našem případě vyhovují podmínce úlohy 4 příčky:

$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AF}$, $\overleftrightarrow{BH}$, $\overleftrightarrow{AH}$

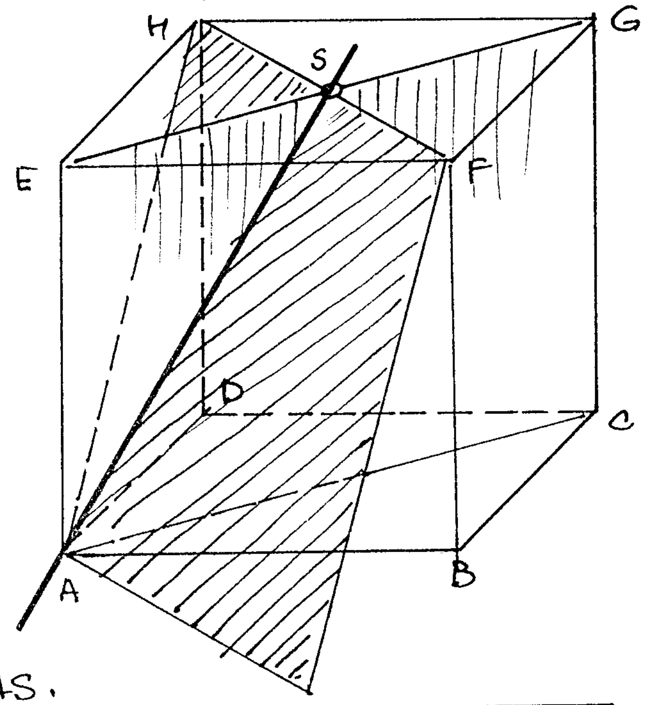
Příklad 12 (9a/48): Určete příčku mimoběžek z příkladu 11, která prochází bodem M, který je středem hrany EF.



Řešení: Hledaná příčka je přímka AX ležící v rovině přední stěny krychle (ABFE).

Příklad 13 (2.44a/51-mě.)

Sestrojte průsečnici rovin ACG a AFH krychle ABCDEFGH.

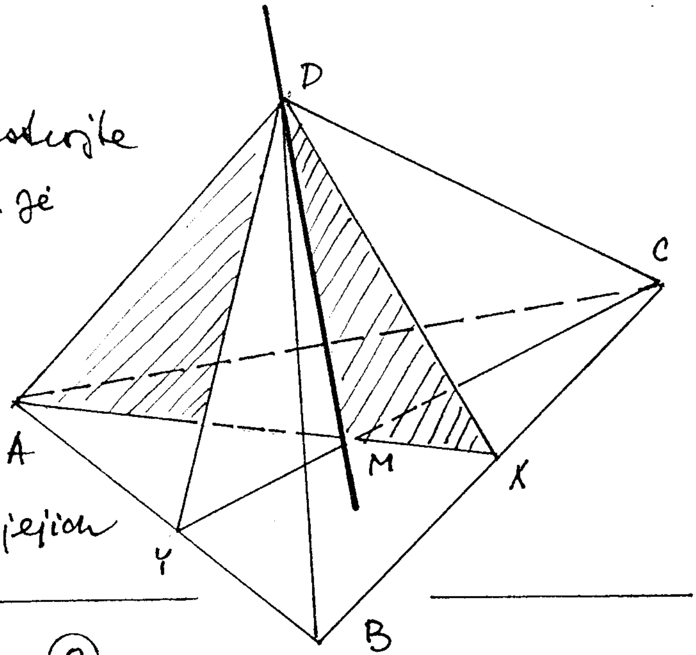


A, S jsou společné body obou rovin, kde $S \in EG \cap FH$

Průsečnicí obou rovin je přímka AS.

Příklad 14 (2.45a/51-mě.):

Je dán čtyřstěn ABCD. Sestrojte průsečnici rovin AXD a CYD; X je středem hrany BC, Y středem hrany AB.



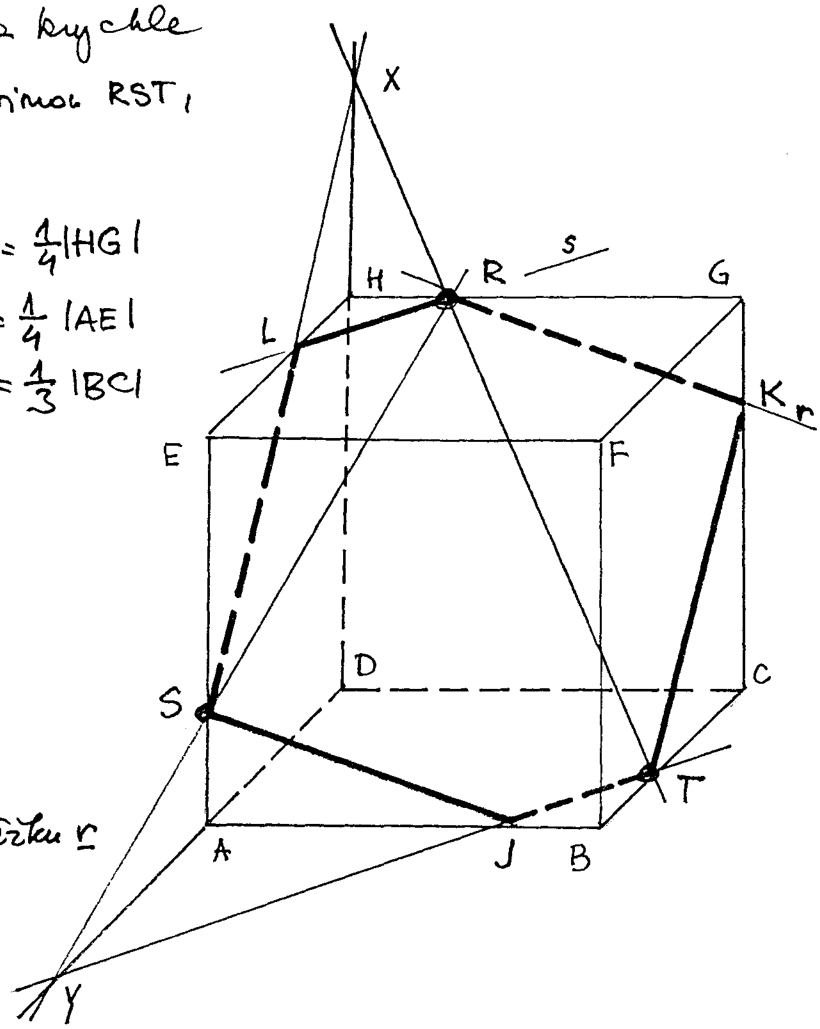
Protože roviny AXD a CYD mají dva společné body D, M, kde $M \in AX \cap CY$, tak jejich průsečnicí je přímka DM.

Příklad 15: Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou RST, je-li

$R \in GH \wedge |HR| = \frac{1}{4}|HG|$

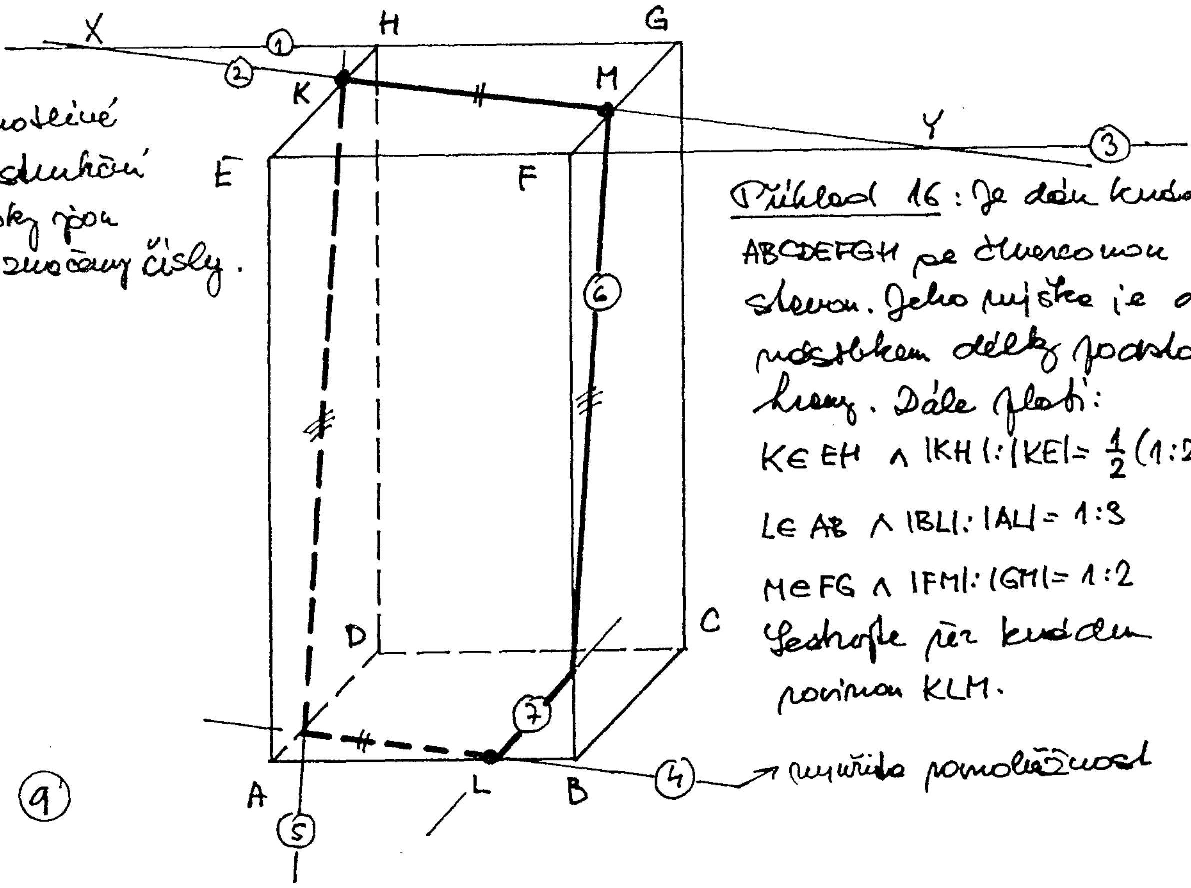
$S \in AE \wedge |AS| = \frac{1}{4}|AE|$

$T \in BC \wedge |BT| = \frac{1}{3}|BC|$



1) Y; $Y \in \overrightarrow{RS} \cap \overrightarrow{DA}$
2) J; $J \in \overrightarrow{TY} \cap AB$
3) Vyznačíme SJ a JT
4) X; $X \in \overrightarrow{TR} \cap \overrightarrow{DH}$
5) R; $R \in \overrightarrow{TR} \cap HG$
6) Bodem R vedeme rovnoběžku $\underline{r}$ s přímkou SJ
7) K; $K \in r \cap CG$
8) Vyznačíme RK
9) Bodem R vedeme rovnoběžku $\underline{s}$ s přímkou JT atd.

Jednotlivé konstrukční kroky jsou vyznačeny čísly.



Příklad 16: Je dán kvádr ABCDEFGH se čtvercovou podstavou. Jeho výška je dvojnásobkem délky podstavné hrany. Dále platí:

$K \in EH \wedge |KH| : |KE| = \frac{1}{2}\ (1:2)$

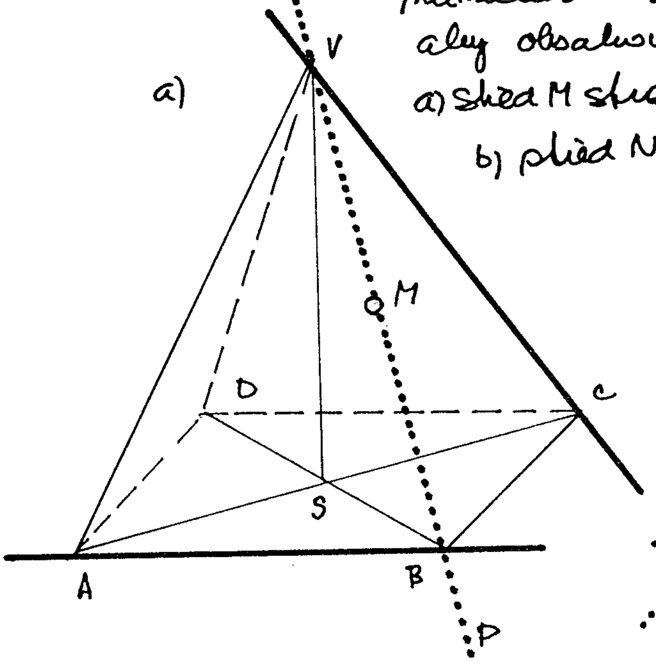
$L \in AB \wedge |BL| : |AL| = 1:3$

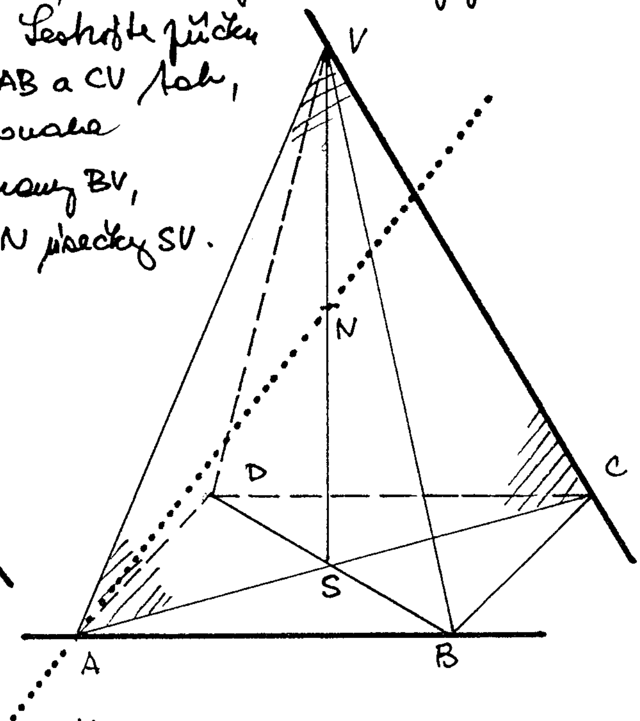
$M \in FG \wedge |FM| : |GM| = 1:2$

Sestrojte řez kvádru rovinou KLM.

Příklad 17: (2.58/53 - uč): Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV. Bod S je střed jeho podstavy. Sestrojte příčku mimoběžek AB a CV tak, aby obsahovala
a) střed M strany BV,
b) střed N úsečky SV.

a)

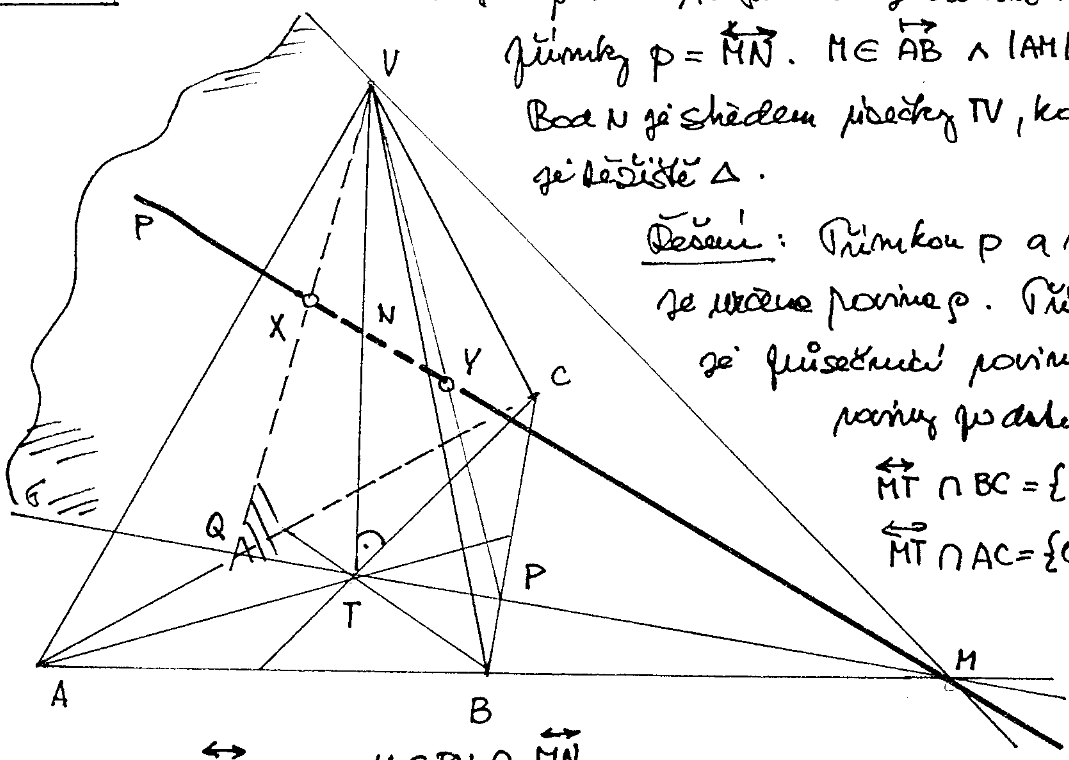




Řešením je přímka BV.

Řešením je přímka AN ležící v rovině ACV.

Příklad 18 (7/147-uč.) Sestrojte průnik trojbokého jehlanu ABCV a přímky $p = \overleftrightarrow{MN}$. $M \in \overrightarrow{AB} \wedge |AM| = 2|AB|$. Bod N je středem úsečky TV, kde bod T je těžiště △.



Řešení: Přímkou p a vrcholem V je určena rovina σ. Přímka MT je průsečnicí roviny σ a roviny podstavy ABC.

$\overleftrightarrow{MT} \cap BC = \{P\}$

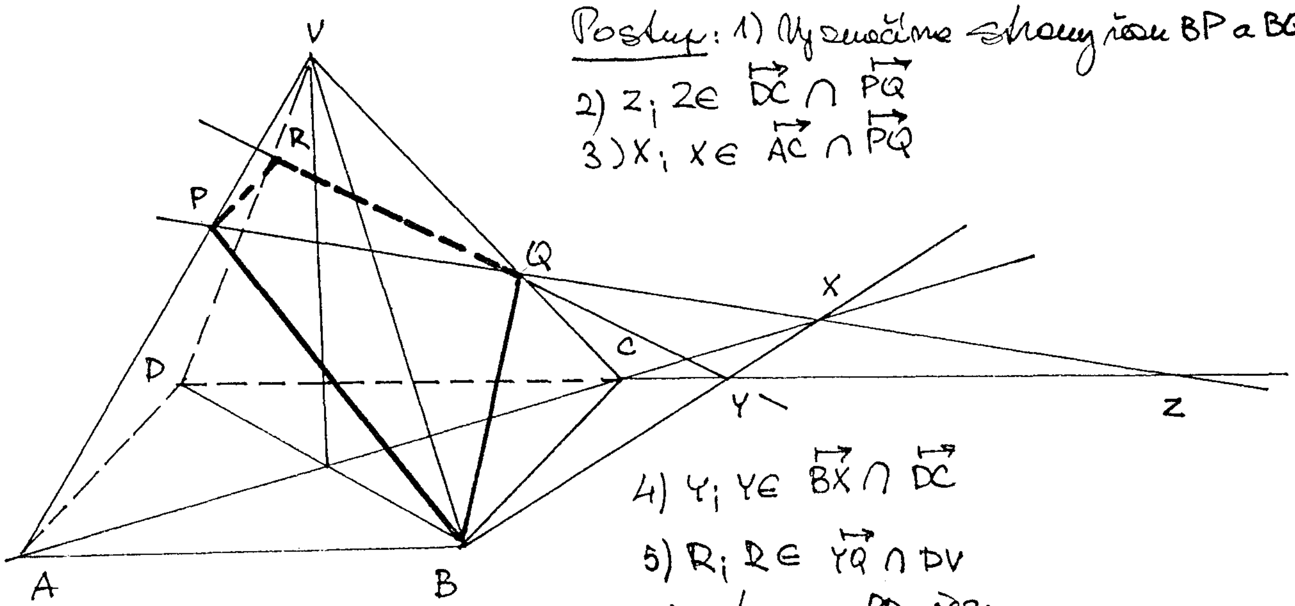
$\overleftrightarrow{MT} \cap AC = \{Q\}$

$X \in QV \cap \overleftrightarrow{MN}$, $Y \in PV \cap \overleftrightarrow{MN}$

△PVQ je průnikem roviny σ a jehlanu ABCV.

Průnikem přímky p a jehlanu ABCV je úsečka XY.

Příklad 19 (2.41b/51): Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCDV rovinou BPQ; $P \in AV$, $Q \in CV$ $\wedge$ $|AP|:|PV| = |VQ|:|QC| = 2:1$.



Postup: 1) Vyznačíme strany řezu BP a BQ.

2) Z; $Z \in \overrightarrow{DC} \cap \overrightarrow{PQ}$

3) X; $X \in \overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{PQ}$

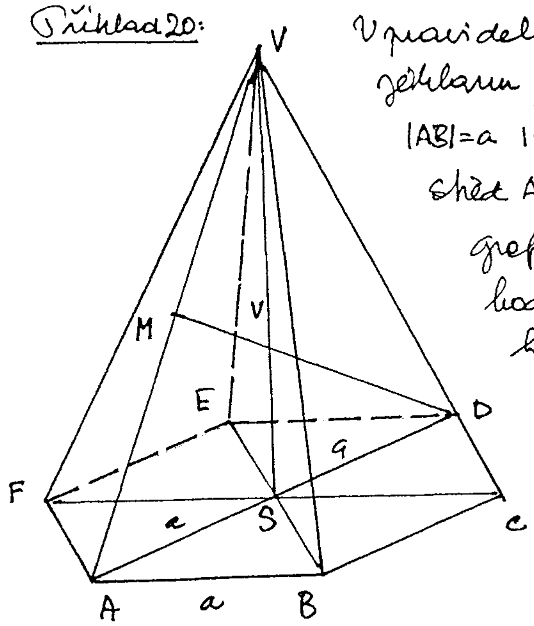
4) Y; $Y \in \overrightarrow{BX} \cap \overrightarrow{DC}$

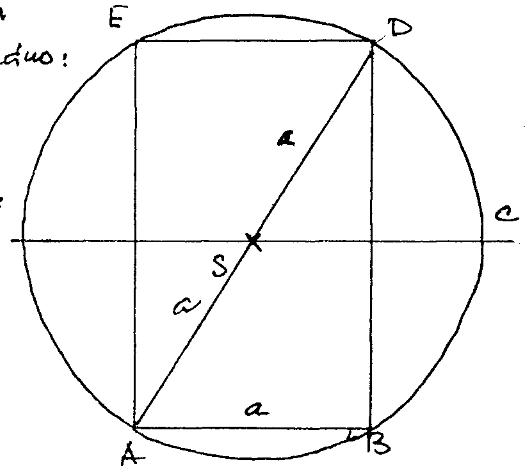
5) R; $R \in \overrightarrow{YQ} \cap DV$

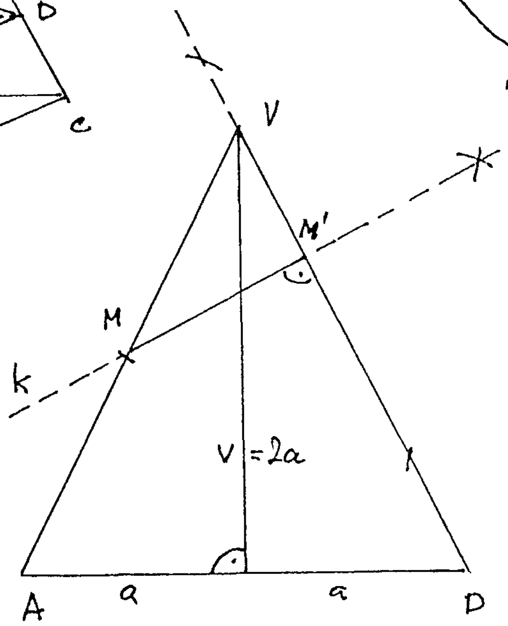
6) stranu PR řezu

Řešení je čtyřúhelník BQRP.

Příklad 20: V pravidelném šestibokém jehlanu ABCDEF je dáno: $|AB| = a$ $|SV| = 2a$, M je střed AV. Určete graficky vzdálenost bodu M od od hrany DV.







Řešení: $\triangle ADV$, $|AD| = 2a$

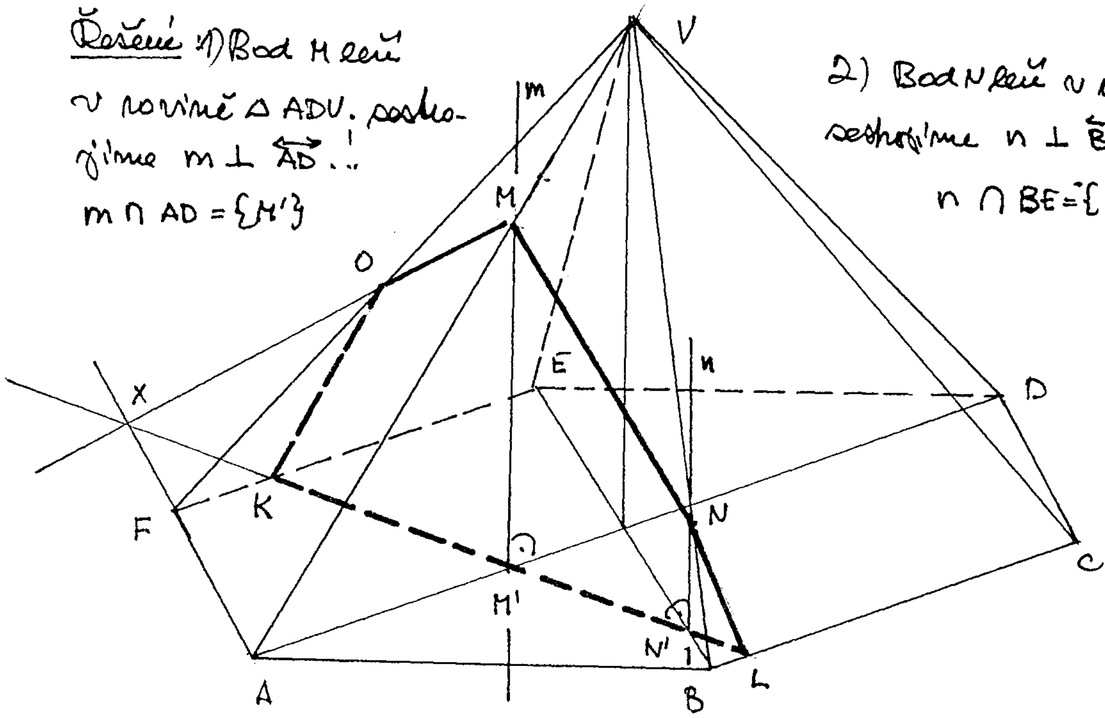
$|SV| = 2a$

Vyznačíme M jako střed AB a sestrojíme kolmici k k hraně DV. Délka úsečky MM je hledaná vzdálenost bodu M od hrany DV.

Příklad 21: Sestrojte řez pravidelného šestibokého jehlanu rovinou ρ ($\rho \perp \overleftrightarrow{ABC}$), která prochází body M, N ($M \in AV$, $|MV| = \frac{1}{3} AV$, $N \in BV$, $|BN| = \frac{1}{4} |VB|$

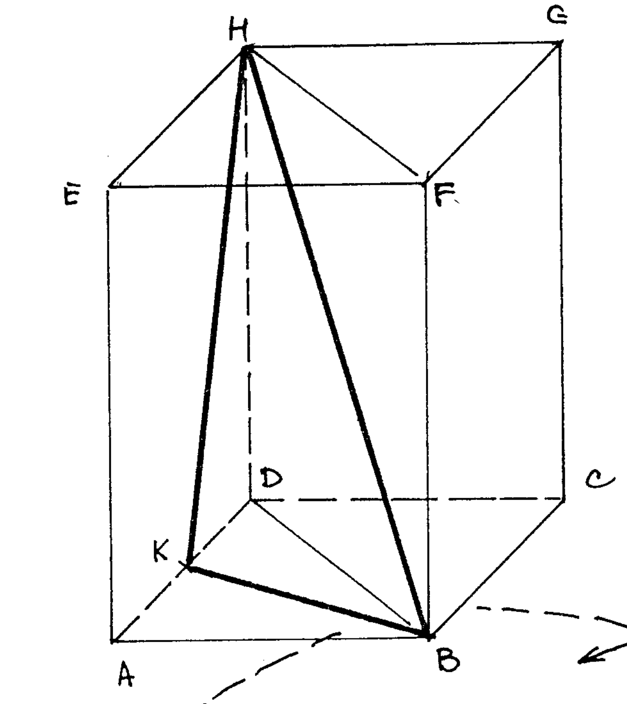
Řešení: 1) Bod M leží v rovině $\triangle ADV$. sestrojíme $m \perp \overleftrightarrow{AD}$ ... !
$m \cap AD = \{M'\}$

2) Bod N leží v rovině $\triangle EBV$; sestrojíme $n \perp \overleftrightarrow{BE}$ ..
$n \cap BE = \{N'\}$



3) Hranu řezu KL, $KL \subset \overleftrightarrow{M'N'}$, hrany LN, MN, pomocný bod X
$X \in \overrightarrow{AF} \cap \overleftrightarrow{M'N'}$, hrany OM, KO.

Příklad 22: Je dán kvádr ABCDEFGH o rozměrech $|AB| = a = 4cm$, $|BC| = b = 5cm$, $|AE| = c = 6cm$; K je střed AD. Sestrojte skutečný tvar a velikost $\triangle BHK$.
Řešení je na další straně.



Musíme sestrojit skutečné délky stran △ BHK.
Strana - úsečka BK je v podstavě ABCD, úsečka BH je v obdélníku BFHD, úsečka HK je v boční stěně ADHE.