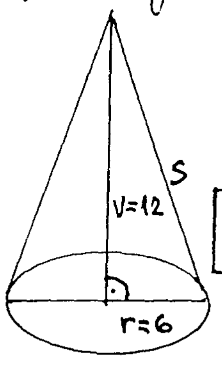
4.4 Kužel a komolý kužel

① Vypočítejte objem a povrch rotačního kužele o poloměru ~~poloměru~~ podstavy $r = 6\,cm$ a výšce $v = 12\,cm$.



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 12$

$\boxed{V \doteq 452{,}389\,cm^3}$

$S = \pi r^2 + \pi r s$

$S = \pi r (r+s)$

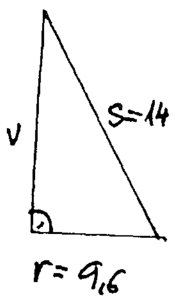
$s = \sqrt{12^2+6^2}$

$s = 13{,}41640787$

$S = \pi 6 (6 + 13{,}41640787)$

$\boxed{S \doteq 365{,}99\,cm^2}$

② Vypočítejte objem a povrch rotačního kužele, který má poloměr podstavy $r = 9{,}6\,cm$ a stranu $s = 14\,cm$.



$v = \sqrt{14^2 - 9{,}6^2}$

$v = 10{,}19019136$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9{,}6 \cdot 10{,}19019136$

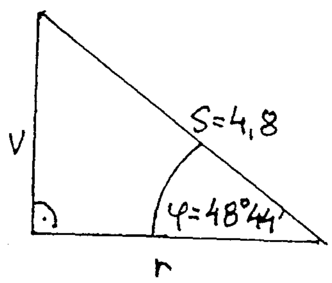
$\boxed{V \doteq 983{,}453\,cm^3}$

$S = \pi r (r+s)$

$S = \pi \cdot 9{,}6 \cdot (9{,}6 + 14)$

$\boxed{S \doteq 711{,}759\,cm^2}$

③ Vypočítejte objem a povrch rotačního kužele, jehož strana $s = 4{,}8\,cm$ svírá s rovinou podstavy úhel $\varphi = 48°44'$.



$\sin\varphi = \frac{v}{s}$

$v = s \cdot \sin\varphi$

$v = 4{,}8 \cdot \sin 48°44'$

$\underline{v = 3{,}607710303}$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v}{r}$

$r = \frac{v}{\operatorname{tg}\varphi}$

$r = \frac{3{,}607710303}{\operatorname{tg} 48°44'}$

$\underline{r = 3{,}165909545}$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$

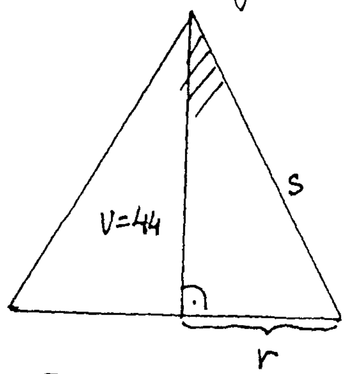
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3{,}165909545^2 \cdot 3{,}607710303$

$\boxed{V \doteq 37{,}867\,cm^3}$

$S = \pi r (r+s) = \pi \cdot 3{,}165909545 \cdot (3{,}165909545 + 4{,}8)$

$\boxed{S \doteq 79{,}229\,cm^2}$

4) Výška kužele je 44 cm a poměr obsahu podstavy k obsahu pláště je 4 : 9. Určete objem a povrch kužele.



$$\frac{S_p}{S_{pl}} = \frac{4}{9} \quad \dots \quad \frac{\pi r^2}{\pi r s} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{r}{s} = \frac{4}{9} \Rightarrow \underline{r = \frac{4}{9}s} \text{ nebo } \underline{s = \frac{9}{4}r}$$

$$v = \sqrt{s^2 - r^2}$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{9}{4}r\right)^2 - r^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{81}{16}r^2 - r^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{65}{16}r^2}$$

$$v = \frac{\sqrt{65}}{4} \cdot r$$

$$44 = \frac{\sqrt{65}}{4} r$$

$$r = 44 \cdot \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$r = \frac{176}{\sqrt{65}}$$

$$\underline{r \doteq 21{,}83011329}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 21{,}83011329^2 \cdot 44$$

$$\boxed{V \doteq 21\,958{,}025 \text{ cm}^3}$$

$$S = \pi r (r + s)$$

$$S = \pi \cdot 21{,}83011329 \cdot (21{,}83011329 + 49{,}1177549)$$

$$\boxed{S \doteq 4865{,}699 \text{ cm}^2}$$

$$s = \frac{9}{4} r$$

$$s = \frac{9}{4} \cdot 21{,}83011329$$

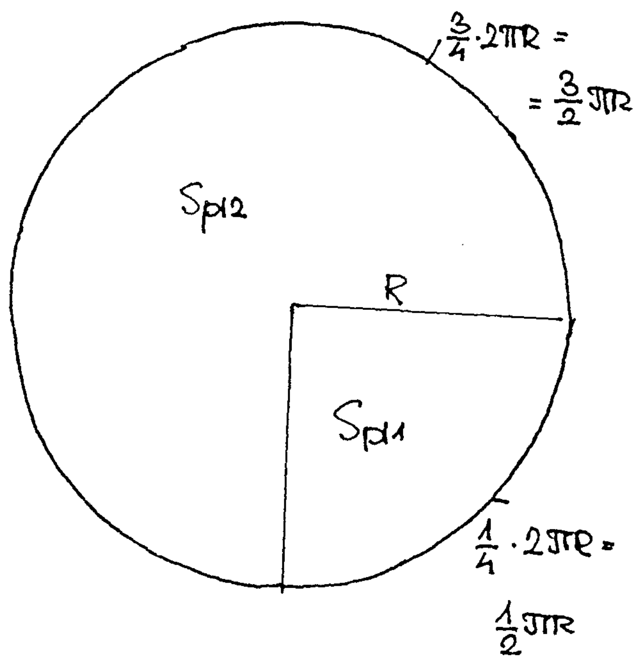
$$s = 49{,}1177549$$

---

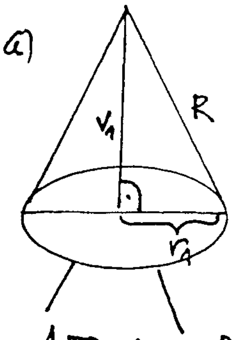
5) Z kruhového plechu o poloměru R vystřihneme čtvrtkruhový výsek. Z obou výsečí složíme pláště kuželů. Vypočítejte a) poloměry obou podstav,

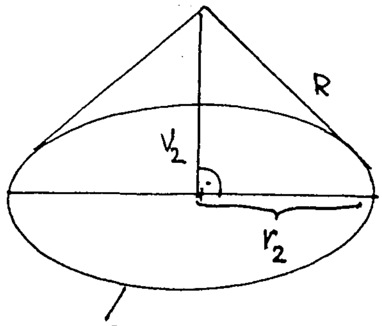
b) tělesové výšky,

c) objemy obou vzniklých kuželů.



a)





$O_1 = \frac{1}{2}\pi R \wedge O_1 = 2\pi r_1$

$\frac{1}{2}\pi R = 2\pi r_1 \quad | \frac{2}{\pi}$

$R = 4r_1$

$\boxed{r_1 = \frac{1}{4}R}$

$O_2 = \frac{3}{2}\pi R \wedge O_1 = 2\pi r_2$

$2\pi r_2 = \frac{3}{2}\pi R \quad | \cdot 2$

$4\pi r_2 = 3\pi R \quad | : \pi$

$4r_2 = 3R \Rightarrow \boxed{r_2 = \frac{3}{4}R}$

---

b)

$v_1 = \sqrt{R^2 - r_1^2}$

$v_1 = \sqrt{R^2 - (\frac{1}{4}R)^2}$

$v_1 = \sqrt{R^2 - \frac{1}{16}R^2}$

$v_1 = \sqrt{\frac{15}{16}R^2}$

$\boxed{v_1 = \frac{R}{4} \cdot \sqrt{15}}$

$v_2 = \sqrt{R^2 - r_2^2}$

$v_2 = \sqrt{R^2 - (\frac{3}{4}R)^2}$

$v_2 = \sqrt{R^2 - \frac{9}{16}R^2}$

$v_2 = \sqrt{\frac{7}{16}R^2}$

$\boxed{v_2 = \frac{R}{4}\sqrt{7}}$

---

c) $V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 v$

$V_1 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{4}R\right)^2 \cdot \frac{R}{4}\sqrt{15}$

$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{16}R^2 \cdot \frac{R}{4} \cdot \sqrt{15}$

$V_1 = \frac{1}{192}\pi R^3 \cdot \sqrt{15}$

$\boxed{V_1 = \frac{\pi \cdot \sqrt{15}}{192} \cdot R^3}$

$V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 v$

$V_2 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{3}{4}R\right)^2 \cdot \frac{R}{4}\sqrt{7}$

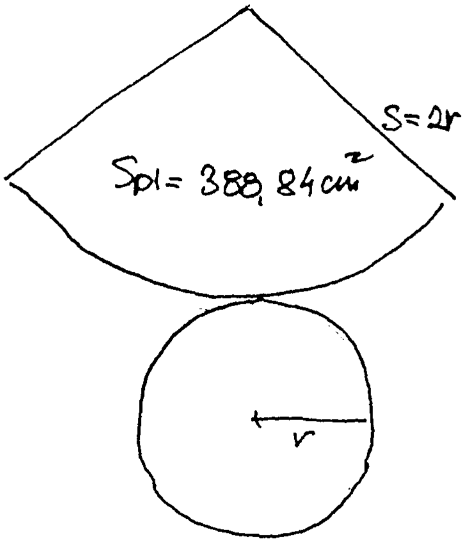
$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{9}{16}R^2 \cdot \frac{R}{4}\sqrt{7}$

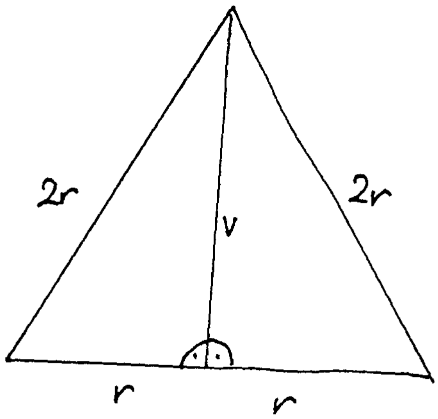
$V_2 = \frac{3}{64} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \sqrt{7}$

$\boxed{V_2 = \frac{3\pi \cdot \sqrt{7}}{64} \cdot D^3}$

Ve slice je pro V_2 hezčí výsledek, avšak nezkrácený. $(\frac{9}{192} = \frac{3}{64})$.

6. Povrch kužele je $388{,}84\ cm^2$, osový řez je rovnostranný Δ. Určete objem kužele.





$v = \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdots v = r\sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot v$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r \cdot \sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \sqrt{3}$

$S = \pi r (r + s)$

$S = \pi r (r + 2r)$

$S = \pi r \cdot 3 \cdot r$

$S = 3\pi r^2$

$388{,}84 = 3\pi r^2$

$r = \sqrt{\frac{388{,}84}{3\pi}}$

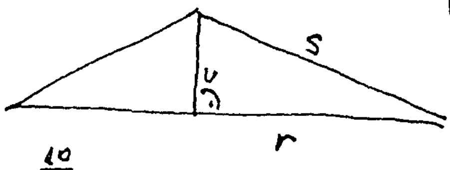
$\underline{r = 6{,}423\,177\,203}$

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 6{,}423\,177\,203^3 \cdot \sqrt{3}$

$\boxed{V = 480{,}661\ cm^3}$

---

7. Objem kužele je $100\ m^3$, obsah osového řezu je $10\ m^2$. Vypočítejte povrch kužele.



$r \cdot v = 10$

$v = \frac{10}{r}$

$\wedge\ \frac{1}{3}\pi r^2 v = 100$

$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{10}{r} = 100$

$\frac{10\pi r^2}{r} = 300$

$10\pi r = 300$

$\pi r = 30$

$r = \frac{30}{\pi}$

$\underline{r = 9{,}549\,296\,586}$

$v = \frac{\frac{10}{1}}{\frac{30}{\pi}} = \frac{10\pi}{30} \rightarrow v = \frac{\pi}{3}$

$\underline{v = 1{,}047\,197\,551}$

$s=\sqrt{r^2+v^2}$

$s=\sqrt{9{,}549\,296\,586^2+1{,}047\,197\,551^2}$

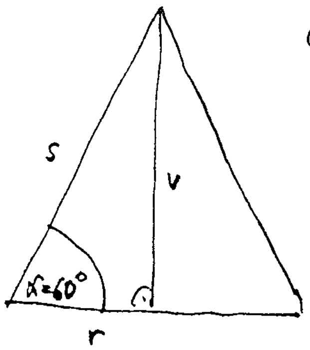
$s=9{,}606\,544\,019$

$S=\pi r(r+s)=\pi\cdot 9{,}549\,296\,586\cdot(9{,}549\,296\,586+9{,}606\,544\,019)$

$\boxed{S \doteq 574{,}675\,m^2}$

---

* (8) Strana rotačního kužele svírá s rovinou podstavy úhel $\alpha=60°$, jeho povrch $S = 50\,cm^2$. Určete objem kužele.



$\cos\alpha=\frac{r}{s}$

$\cos 60°=\frac{r}{s}$

$\frac{1}{2}=\frac{r}{s}$

$\underline{s=2r}$

$S=\pi r(r+s)$

$S=\pi r(r+2r)$

$S=\pi r\cdot 3r$

$S=3\pi r^2$

$50=3\pi r^2$

$r=\sqrt{\frac{50}{3\pi}}$

$\underline{r=2{,}303\,294\,33}$

$v=\sqrt{(2r)^2-r^2}$

$v=\sqrt{4r^2-r^2}$

$v=\sqrt{3r^2}$

$\underline{v=r\cdot\sqrt{3}}$

$V=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2 v$

$V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot r\cdot\sqrt{3}$

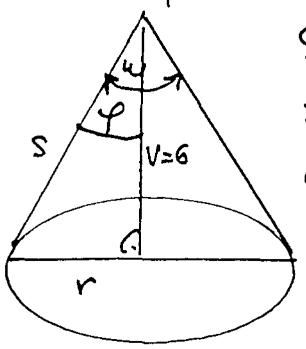
$V=\frac{1}{3}\pi r^3\cdot\sqrt{3}$

$V=\frac{1}{3}\pi\cdot 2{,}303\,294\,33^3\cdot\sqrt{3}$

$\boxed{V=22{,}163\,cm^3}$

---

* (9) Rotační kužel má výšku $v=6\,m$; jeho plášť má číselně tolik m^2, kolik m^3 má jeho objem. Určete úhel při vrcholu osového řezu kuželem.



$S_{pl}\approx V$, položíme rovnítko

$\pi r s=\frac{1}{3}\pi r^2 v$

$\pi r s=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot 6$

$\pi r s=2\pi r^2 \quad |:\pi r$

$\boxed{s=2r}$

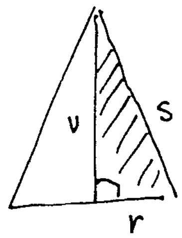
$\sin\varphi=\frac{r}{s}=\frac{r}{2r}=\frac{1}{2}$

$\sin\varphi=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=30°$

$\omega=2\varphi$ $\boxed{\omega=60°}$

Rotační kužel má objem $V = 100\pi$ a povrch $S = 90\pi$. Určete polo-

* (10) měr podstavy a výšku kužele



$\frac{1}{3}\pi r^2 v = 100\pi \quad | : \pi$

$\frac{r^2 v}{3} = 100 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{300}{r^2} \quad , \quad r^2 = \frac{300}{v} \quad , \quad r = \sqrt{\frac{300}{v}}$

$s = \sqrt{v^2 + r^2}$

$s = \sqrt{v^2 + \frac{300}{v}}$

$s = \sqrt{\frac{v^3 + 300}{v}}$

$\pi r^2 + \pi r s = 90\pi \quad | : \pi$

$r^2 + rs = 90$

$\frac{300}{v} + \sqrt{\frac{300}{v}} \cdot \sqrt{\frac{v^3 + 300}{v}} = 90$

$\frac{300}{v} + \sqrt{\frac{300 \cdot (v^3 + 300)}{v^2}} = 90$

$\frac{300}{v} + \frac{\sqrt{300v^3 + 90000}}{v} = 90 \quad | \cdot v$

$300 + \sqrt{300v^3 + 90000} = 90v$

$\sqrt{300v^3 + 90000} = 90v - 300$

$300v^3 + 90000 = (90v - 300)^2$

$300v^3 + \cancel{90000} = 8100v^2 - 54000v + \cancel{90000}$

$300v^3 - 8100v^2 + 54000v = 0 \quad | : v$

$300v^2 - 8100v + 54000 = 0 \quad | : 300$

$v^2 - 27 - 180 = 0$

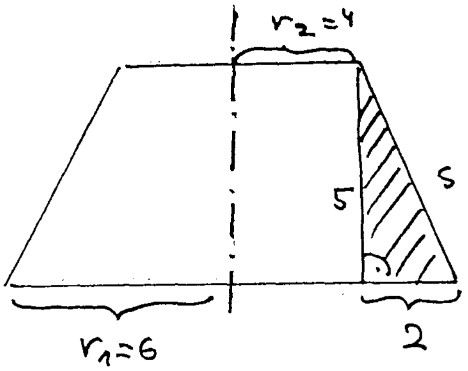
$v_{1,2} = \frac{27 \pm 3}{2} = \begin{cases} v_1 = 15 \\ v_2 = 12 \end{cases}$

$r_1 = \sqrt{\frac{300}{15}} = \sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5}$

$r_2 = \sqrt{\frac{300}{12}} = \sqrt{25} = 5$

Úloha má 2 řešení: $\boxed{\begin{matrix} r_1 = 2 \cdot \sqrt{5}, & v_1 = 15 \\ r_2 = 5, & v_2 = 12 \end{matrix}}$

(11) Určete objem a povrch komolého kužele, jehož poloměry podstav jsou 6m a 4m a jeho výška je 5m.



$$V=\frac{\pi v}{3}(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)$$

$$V=\frac{\pi 5}{3}(6^2+6.4+4^2)$$

$$\boxed{V \doteq 397{,}935\ m^3}$$

$$S=\pi r_1^2+\pi r_2^2+\underbrace{\pi(r_1+r_2)\cdot s}_{S_{pl}}$$

$$s=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$$

$$S=\pi.6^2+\pi 4^2+\pi(6+4).\sqrt{29}$$

$$\boxed{S\doteq 332{,}543\ m^2}$$

(12) Povrch rotač. komolého kužele je $S=7497\ m^2$. Průměry podstav jsou 56m a 42m. Určete výšku kužele.

$$S=\pi r_1^2+\pi r_2^2+\pi s(r_1+r_2)$$

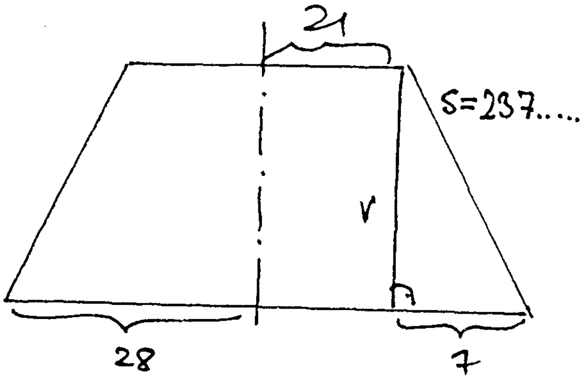
$$7497=\pi\cdot[r_1^2+r_2^2+s(r_1+r_2)]$$

$$\frac{7497}{\pi}=[28^2+21^2+s(28+21)]$$

$$2386{,}369217=1225+49s$$

$$49s=1161{,}369217$$

$$s=23{,}70141259$$

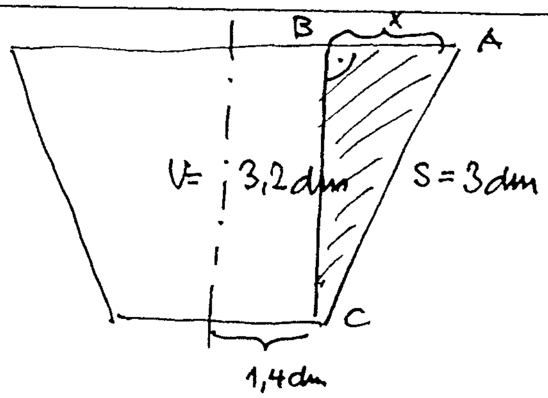


$$v=\sqrt{s^2-7^2}$$

$$v=\sqrt{23{,}70141259-49}$$

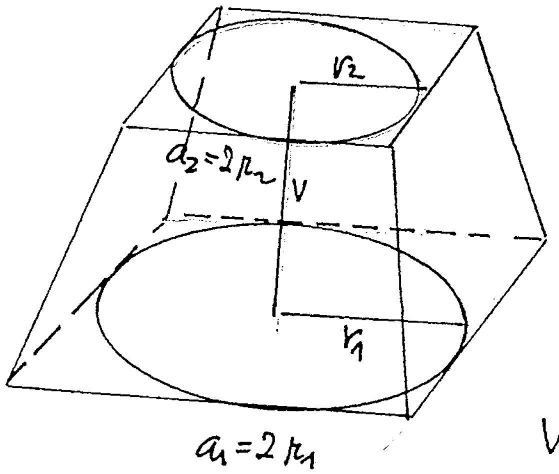
$$\boxed{v\doteq 22{,}644\ m}$$

(13) Vědro na vodu je z plechu a má tvar komolého rotačního kužele. Průměr dna je 28cm, délka stěny je 30cm a výška vědra 32cm. Určete, kolik vody se vejde do vědra.



V △ABC je přepona AC kratší než odvěsna $\underline{v}$ ⇒ úloha nemá řešení!

* **14** V jakém poměru jsou objemy pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu a komolého kužele do jehlanu vepsaného?



$$V_j = \frac{v}{3}\left[(2r_1)^2 + \sqrt{(2r_1)^2 \cdot (2r_2)^2} + (2r_2)^2\right]$$

$$V_j = \frac{v}{3}\left[4r_1^2 + \underbrace{2r_1 \cdot 2r_2}_{4} + 4r_2^2\right]$$

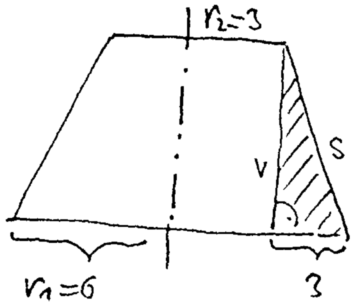
$$V_j = \frac{4v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$V_k = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$\frac{V_j}{V_k} = \frac{\frac{4v}{3}\cancel{(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}}{\frac{\pi v}{3}\cancel{(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}} = \frac{12v}{3\pi v} = \frac{12}{3\pi} = \frac{4}{\pi} = \boxed{4 : \pi}$$

---

15 Rotační komolý kužel má poloměry podstav $r_2 = 3$ cm, $r_1 = 6$ cm. Vypočtěte jeho objem, rovná-li se jeho plášť součtu obsahů jeho podstav.



$$\pi s(r_1 + r_2) = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 \quad /:\pi$$

$$s(r_1 + r_2) = r_1^2 + r_2^2$$

$$s = \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1 + r_2} = \frac{6^2 + 3^2}{6+3} = \frac{45}{9} = 5 \quad \ldots \boxed{s = 5}$$

$v = \sqrt{s^2 - 3^2}$

$v = \sqrt{25 - 9}$

$v = \sqrt{16}$

$\boxed{v = 4}$

$$V = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$V = \frac{\pi \cdot 4}{3}(6^2 + 6 \cdot 3 + 3^2)$$

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot 63$$

$$\boxed{V = 84\pi \text{ cm}^3 \text{ nebo } V \doteq 263{,}894 \text{ cm}^3}$$

KONEC ČLÁNKU 4.4