4.5 Koule a její části

(1) Vypočtěte V a S koule o poloměru $r = 10{,}35\,cm$.

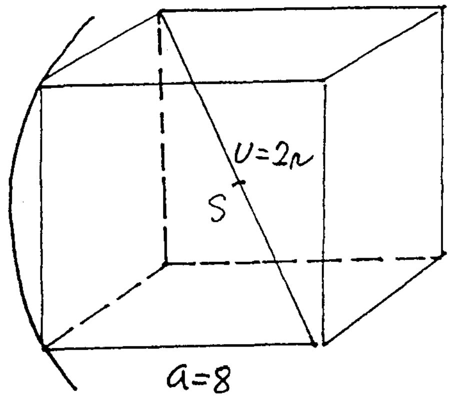
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\qquad$ $S = 4\pi r^2$

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 10{,}35^3$ $\qquad$ $S = 4 \cdot \pi \cdot 10{,}35^2$

$\boxed{V \doteq 4644{,}187\,cm^3}$ $\qquad$ $\boxed{S \doteq 1346{,}141\,cm^2}$

---

(2) Kouli je vepsána krychle o hraně 8cm. Určete poloměr koule.



$u = a \cdot \sqrt{3}$

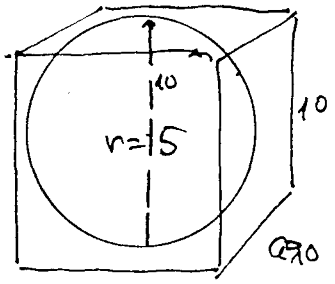
$u = 8 \cdot \sqrt{3}$

$2r = 8 \cdot \sqrt{3}$

$\boxed{r = 4 \cdot \sqrt{3}}$

---

(3)



$2r = a = 10$

$\boxed{r = 5\,cm}$

(4) Objem koule je $100\,cm^3$. Určete její povrch.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow r^3 = \frac{75}{\pi}$

$100 = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\qquad$ $r = \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$

$\pi r^3 = 75$

$r = 2{,}879\,411\,911$

$S = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 2{,}879411911\ldots$ $\boxed{S \doteq 104{,}188\,cm^2}$

---

(5) Povrch koule je $100\,cm^2$. Určete její objem.

$4\pi r^2 = 100$ $\qquad$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\pi r^2 = 25$ $\qquad$ $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}820\,947\,918^3$

$r = \sqrt{\frac{25}{\pi}}$ $\qquad$ $\boxed{V \doteq 94{,}031\,59726\,cm^3}$

$r = 2{,}820\,947\,918$

---

(6) Vypočítejte povrch a objem Země, předpokládáme-li, že má tvar koule s délkou poledníku 40 000 km.

$2\pi r = 40\,000$ $\qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\qquad S = 4\pi r^2$

$r = \frac{40000}{2\pi}$ $\qquad V = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 6{,}366{,}197724^3$ $\qquad S = 4\cdot\pi\cdot 6\,366{,}197724^2$

$r \doteq 6366{,}197724$ $\qquad \boxed{V \doteq 1{,}080759292\cdot 10^{12}\,km^3}$ $\boxed{S \doteq 509\,295\,818\ km^2}$

---

(7) Poloměr koule je 1 dm a hmotnost koule 1 kg. Určete její hustotu.

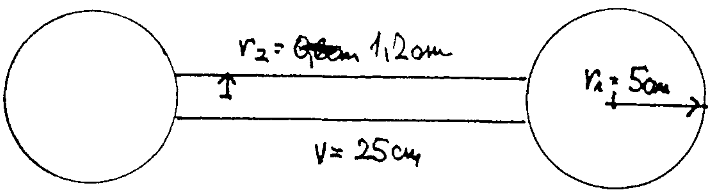
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\qquad m = V\cdot\rho$ $\qquad \rho = 1\cdot\frac{3}{4\pi}$

$V = \frac{4}{3}\pi\cdot 1^3$ $\qquad 1 = \frac{4}{3}\pi\rho$ $\qquad \rho = 0{,}238732414\ kg/dm^3$ $\qquad$ krát 1000, neboť $1m^3 = 1000dm^3$

$V = \frac{4}{3}\pi$ $\qquad 1 = \frac{4\pi}{3}\rho$ $\qquad \boxed{\rho \doteq 238{,}732\ kg/m^3}$

---

(8) Jakou hmotnost má dřevěná činka složená ze dvou koulí o průměru 10 cm a tyčky ve tvaru válce o poloměru 1,2 cm a délce 25 cm. Hustota dřeva je 780 kg/m³.



V_1 2 koulí $= 2\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{8}{3}\pi r^3 = \frac{8}{3}\pi\cdot 5^3 = 1\,047{,}197\,551$

V_2 tyčky $= \pi r^2 v = \pi\cdot 1{,}2^2\cdot 25 = 113{,}0973355$

$V = V_1 + V_2 = 1160{,}294\,887\ (cm^3) = 0{,}001160294\,887\ (m^3)$

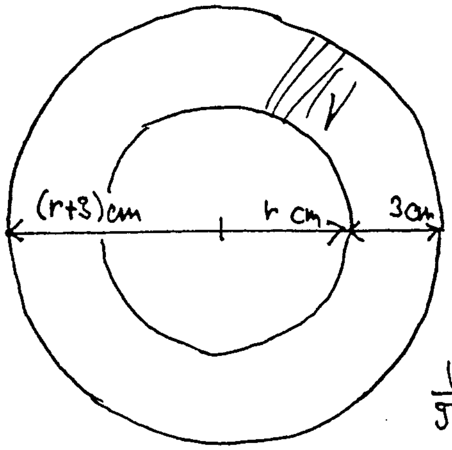
$m = V\cdot\rho$

$m = 0{,}001\,160294887\cdot 780$ $\quad\ldots\quad \boxed{m \doteq 0{,}905\ kg}$

---

(9) Objem duté koule 3432 cm³. Jaký je její vnitřní poloměr, když tloušťka stěny je 3 cm?

$V_1 = \frac{4}{3}\pi(r+3)^3$, $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$



$V = V_1 - V_2$

$V = \frac{4}{3}\pi(r+3)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$

$V = \pi \cdot \left[\frac{4}{3}(r+3)^3 - \frac{4}{3}r^3\right]$

$\frac{V}{\pi} = \frac{4}{3}(r+3)^3 - \frac{4}{3}r^3$

$\frac{3432}{\pi} = \quad$ —″—

$\frac{3432}{\pi} = \frac{4}{3}(r^3 + 9r^2 + 27r + 27) - \frac{4}{3}\cancel{\pi} r^3$

$\frac{3432}{\pi} = \cancel{\frac{4}{3}r^3} + 12r^2 + 36r + 36 - \cancel{\frac{4}{3}r^3} \quad | : 12$

$\frac{286}{\pi} = r^2 + 3r + 3$

$\underbrace{91{,}036\,627\,45}_{\doteq 91} = r^2 + 3r + 3$

$r^2 + 3r - 88 = 0 \quad \ldots \quad r_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+352}}{2} = \frac{-3 \pm 19}{2} =$ $\boxed{r = 8}$; záporné nevyh.

---

(10) Ze tří kovových koulí s objemy $V_1 = 35\ cm^3$, $V_2 = 55\ cm^3$, $V_3 = 65\ cm^3$ byla ulita jediná koule. Určete její povrch.

$V = V_1 + V_2 + V_3 = 35 + 55 + 65 = 155$

$155 = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\qquad S = 4\pi r^2$

$r^3 = 155 \cdot \frac{3}{4\pi}$ $\qquad S = 4 \cdot \pi \cdot 3{,}332\,327\,647^2$

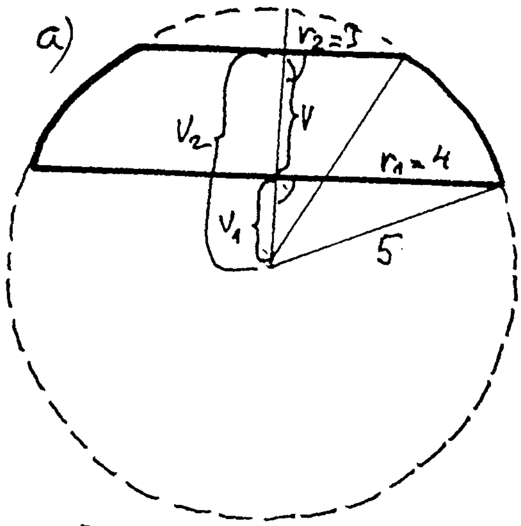
$r^3 = \frac{465}{4\pi}$ $\qquad \boxed{S \doteq 139{,}542\ cm^2}$

$r = 3{,}332\,329\,647$

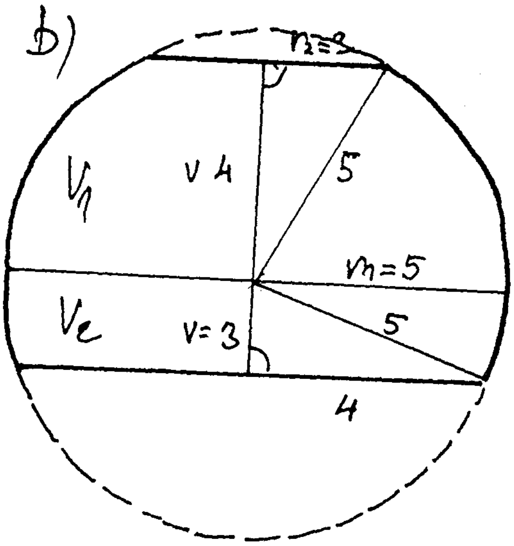
---

* (11) Vypočítejte objem kulové vrstvy, když poloměr koule je $R=5cm$ a poloměry horní a dolní podstavy jsou $r_1=4cm$, $r_2=3cm$.

a)



b)



$v_1=\sqrt{5^2-4^2}$ $\quad v_2=\sqrt{5^2-3^2}$

$v_1=3$ $\quad v_2=4$

$v=v_2-v_1=4-3=1$

$V=\frac{\pi v}{6}(3r_1^2+3r_2^2+v^2)$

$V=\frac{\pi \cdot 1}{6}(3\cdot4^2+3\cdot3^2+1^2)$

$V=\frac{\pi}{6}\cdot 76$

$\boxed{V\doteq 39{,}7935\ cm^3}$

$V_1=\frac{\pi\cdot4}{6}\cdot(3\cdot5^2+3\cdot3^2+4^2)$

$V_1=247{,}138\,622\,1$

$V_2=\frac{\pi\cdot3}{6}(3\cdot5^2+3\cdot4^2+3^2)$

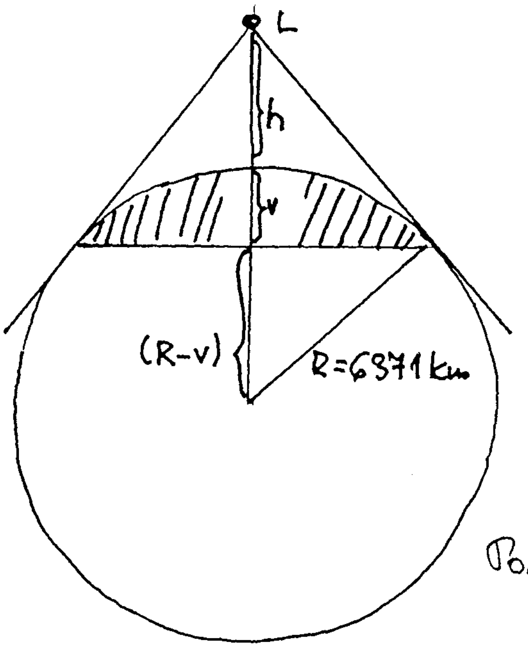
$V_2=207{,}345\,1151$

+

$V=V_1+V_2$

$\boxed{V\doteq 454{,}4837\ cm^3}$

* (12) Jak vysoko musí letět pilot letadla, aby viděl část povrchu Země o ploše $100\,000\ km^2$ (poloměr Země je $R=6\,371km$).



$S_{vrchlíku} = 2\pi R v$

$2\pi R v = 100\,000$

$v = \dfrac{100\,000}{2\pi \cdot 6371}$

$v = 2{,}498\,115\,572$ (km)

Podle Eukleidovy věty o odvěsně platí:

$R^2 = (R+h)\cdot(R-v)$

$6371^2 = (6371+h)\cdot(6371 - 2{,}498\,115\,572)$

$6371^2 = (6371+h)\cdot 6368{,}501\,884$

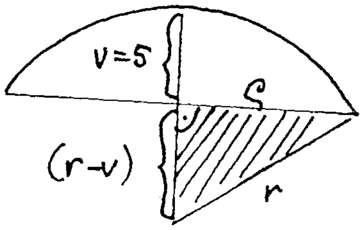
$6371 + h = 6373{,}499096$

$h = 2{,}499 \rightarrow \boxed{h \doteq 2{,}5 \text{ km}}$

Pilot musí letět ve výšce 2,5 km.

---

* (13) Kulová úseč výšky $v=5$ má objem $V=850$. Určete poloměr koule, jejíž je částí.



$\varrho^2 = r^2 - (r-v)^2$

$\varrho^2 = r^2 - (r-5)^2$

$\varrho^2 = r^2 - (r^2 - 10r + 25)$

$\varrho^2 = r^2 - r^2 + 10r - 25$

$\varrho^2 = 10r - 25$

$V = \dfrac{\pi v}{6}(3\varrho^2 + v^2)$

$850 = \dfrac{\pi \cdot 5}{6}[3(10r-25)+25]$

$5100 = 5\pi(30r - 75 + 25) \quad |:5$

$1020 = \pi(30r - 50)$

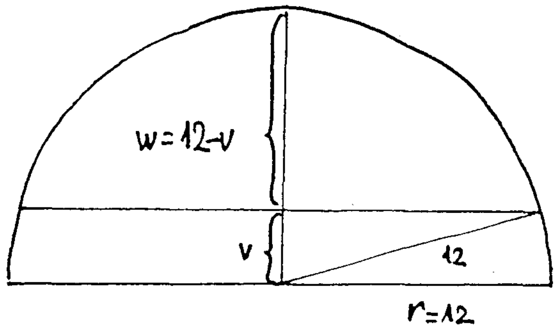
$30r - 50 = \dfrac{1020}{\pi}$

$30r = \dfrac{1020}{\pi} + 50$

$r = \left(\dfrac{1020}{\pi} + 50\right) : 30$

$\boxed{r \doteq 12{,}48}$

* (14) V jaké výšce je nutno protnout polokouli o poloměru $r = 12\,cm$ rovinou rovnoběžnou s její podstavou, aby obsah vrchlíku byl dvakrát větší než obsah pásu?



$$S_V = S_p = 2\pi r v$$

$$S_V = 2\pi r w \quad , \; S_p = 2\pi r v$$

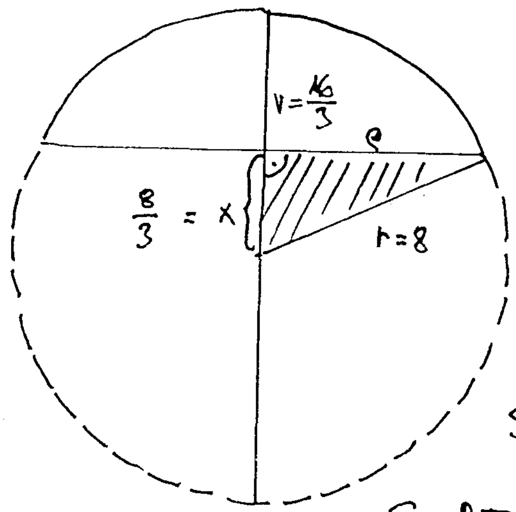
$$S_V = 2\pi r(12-v) \quad \text{a platí:}$$

$$2\pi r\,(12-v) = 2\,.\,2\pi r v \quad | : 2\pi r$$

$$12 - v = 2v \quad \dots \quad 3v = 12 \quad \dots \quad \boxed{v = 4\ (cm)}$$

---

* (15) Z koule o poloměru 8 cm je oddělena úseč, jejíž výška je $\frac{1}{3}$ průměru koule. Urči povrch kulové úseče.



$$2r = 16 \qquad\qquad x = r - v$$

$$\frac{1}{3}\text{ ze } 2r = \frac{1}{3}\cdot 16 = \frac{16}{3} \qquad x = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\varrho^2 = r^2 - x^2$$

$$\varrho^2 = 8^2 - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = 64 - \frac{64}{9} = \frac{512}{9}$$

$$S = S_{vrchlíku} + S_{podstavy}$$

$$S = 2\pi r v + \pi\varrho^2$$

$$S = 2\pi\cdot 8\cdot\frac{16}{3} + \pi\cdot\frac{512}{9}$$

$$S = \frac{256}{3}\pi + \frac{512}{9}\pi = \frac{1280}{9}\pi$$

$$\boxed{S \doteq 446{,}8\ cm^2}$$

KONEC ČLÁNKU 4.5 = KONEC TÉMATU

KONEC UČIVA 2. ROČNÍKU