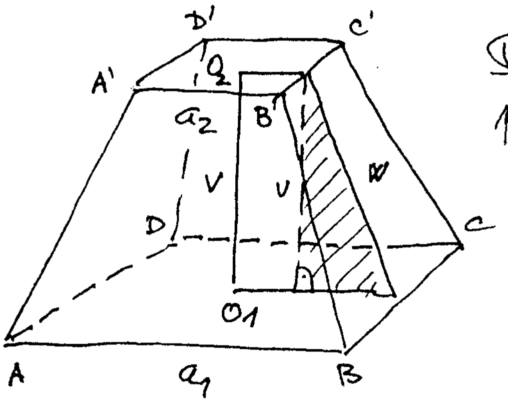
30 a) $\boxed{\text{JEHLAN. KOMOLÝ JEHLAN}}$

① $S = a_1^2 + a_2^2 + 2w(a_1 + a_2)$ .. povrch prav. čtyřbokého k. j.

② $V = \frac{1}{3}v(a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2)$ jen-li to pravidelný čtyřboký k. j.

③ $V = \frac{1}{3}v(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$ -"- o jakýkoli komolý jehlan



Příklad 1: Vypočítejte povrch a objem pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu ABCDA'B'C'D' s výškou $v = 3$ cm, s délkami podstavných hran $a_1 = |AB| = 4,5$ cm, $a_2 = |A'B'| = 2$ cm. Narýsujte síť tohoto jehlanu.

Řešení: $w^2 = \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 + v^2$

$w^2 = \frac{(4,5-2)}{2}^2 + 3^2$

$w = \sqrt{10,5625}$

$\boxed{w = 3,25 \text{ (cm)}}$

$S = a_1^2 + a_2^2 + 2w(a_1 + a_2)$

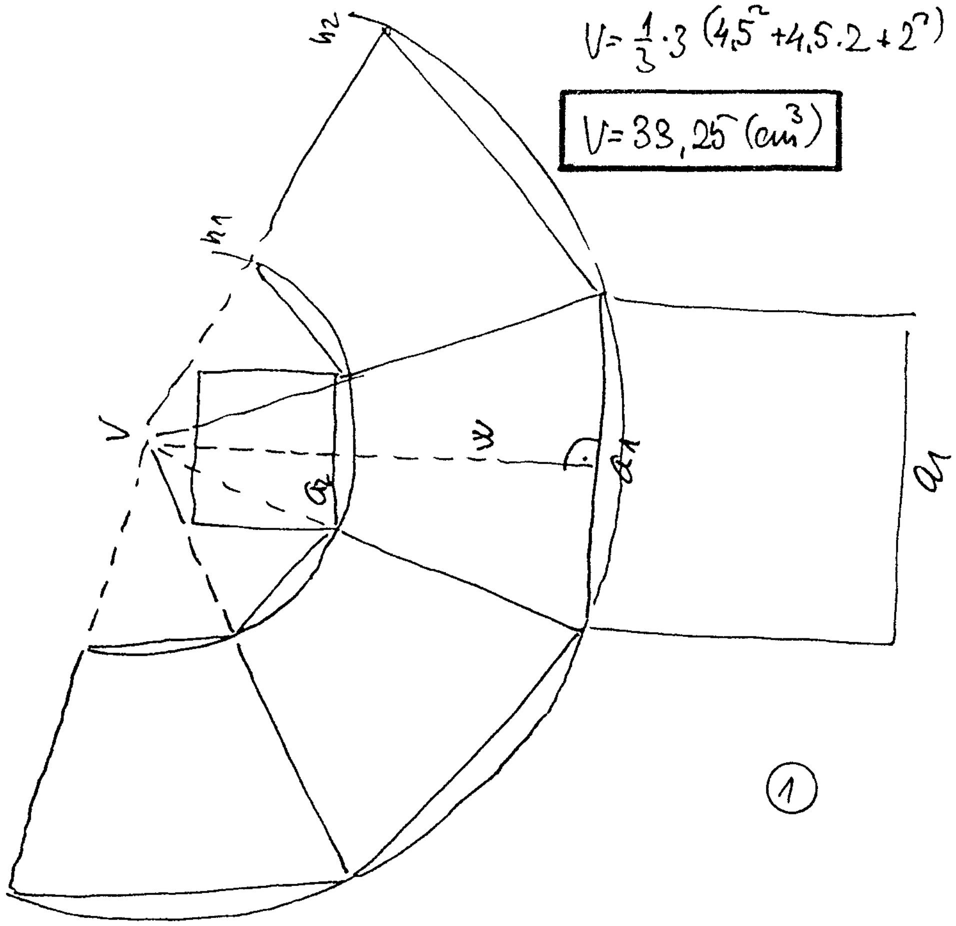
$S = 4,5^2 + 2^2 + 2 \cdot 3,25 \cdot (4,5 + 2)$

$\boxed{S = 66,5 \text{ (cm}^2\text{)}}$

$V = \frac{1}{3}v(a_1^2 + a_1a_2 + a_2)^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot 3\,(4,5^2 + 4,5 \cdot 2 + 2^2)$

$\boxed{V = 33,25 \text{ (cm}^3\text{)}}$

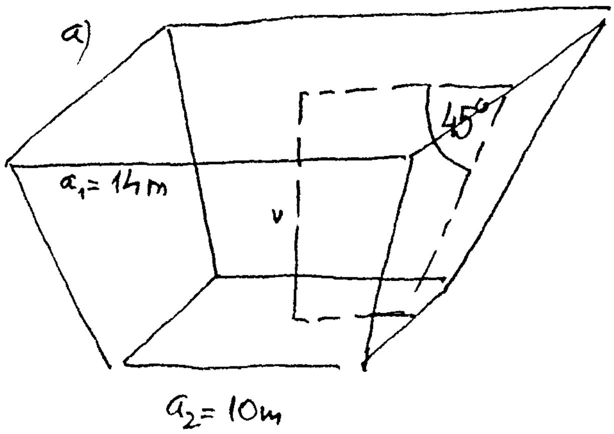


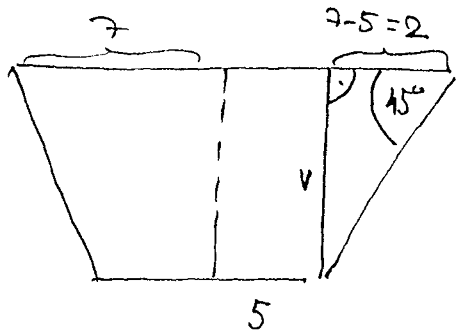
Příklad 2 (5.123 /186-uč.): Jáma má tvar pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, jehož podstavné hrany mají délky 14 m a 10 m. Roviny bočních stěn a roviny podstavy mají odchylku 45°.

a) Kolik m^3 zeminy bylo vykopáno?

b) Kolik m^3 betonu je třeba na vybetonování jámy, má-li být tloušťka betonu 1 dm?

a)





$\operatorname{tg} 45° = \frac{v}{2}$

$v = 2 \cdot \operatorname{tg} 45°$

$\boxed{v = 2 (m)}$

Pro výpočet objemu můžeme použít tedy vzorec (3)

$V = \frac{1}{3} v \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$

$V = \frac{1}{3} \cdot 2 \left(14^2 + \sqrt{14^2 \cdot 10^2} + 10^2\right)$

$\boxed{V = 290\frac{2}{3}\ (m^3) \doteq 291 m^2}$

b) Jde o vybetonování podlahy jámy a bočních stěn.

Objem betonu = Objem V minus V' s rozměry

$a_1 = 14m - 2dm = 13,8\ m$, $a_2 = 10\ m - 2dm = 9,8m$, $v = 2m - 1dm = 1,9m$

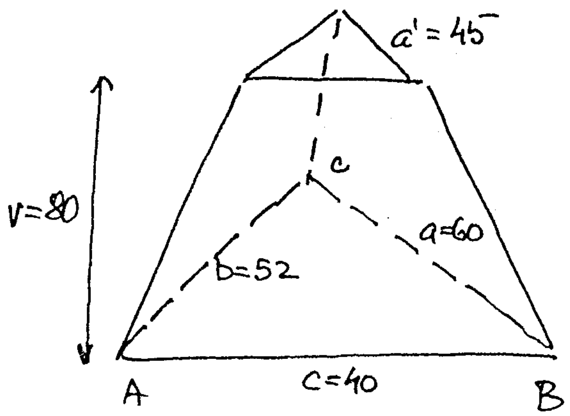
$V' = \frac{1}{3} v \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$

$V' = \frac{1}{3} \cdot 1,9 \cdot \left(13,8^2 + \sqrt{13,8^2 \cdot 9,8^2} + 9,8^2\right) = 267,089$

$V_{betonu} = 290\frac{2}{3} - 267,089 = 23,6$

Bylo třeba $23,6 m^3$ betonu.

Příklad 3 (5.122 /186): Podstavou komolého jehlanu ABCA'B'C' je trojúhelník ABC ($|AB| = a = 60\,cm$, $|AC| = b = 52\,cm$, $|AB| = c = 40\,cm$; $|B'C'| = a' = 45\,cm$, $v = 8\,dm$. Vypočítejte objem.



$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, $k = \frac{a'}{a} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$

$b' = \frac{3}{4} \cdot b = \frac{3}{4} \cdot 52 = 39$

$c' = \frac{3}{4} \cdot c = \frac{3}{4} \cdot 40 = 30$

Využijeme Heronův vzorec:

$S_{\triangle ABC} = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$, kde

$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{60+52+40}{2} = \frac{152}{2} = 76$

$S_{\triangle ABC} = \sqrt{76 \cdot (76-60) \cdot (76-52) \cdot (76-40)}$

$S_{\triangle ABC} = \sqrt{76 \cdot 16 \cdot 24 \cdot 36} \doteq 1024{,}999..$

$S_{\triangle A'B'C'}$ lze vypočítat z obsahu $S_{\triangle ABC}$ vynásobeným k^2, čili $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0{,}75^2$

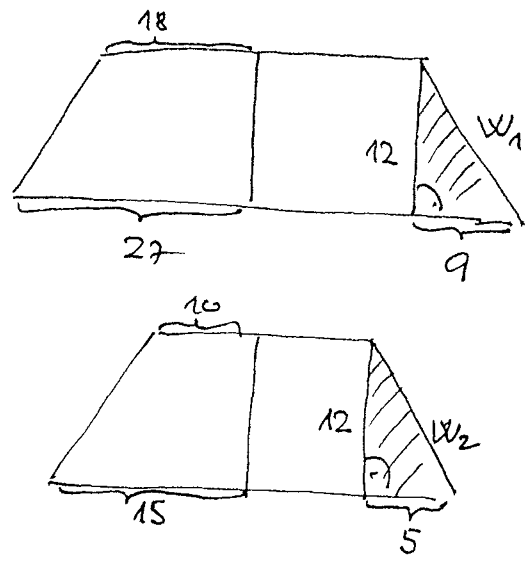
$S_{\triangle A'B'C'} = 1024{,}999 \cdot 0{,}75^2 \doteq 576{,}562$

$V = \frac{1}{3} v \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$

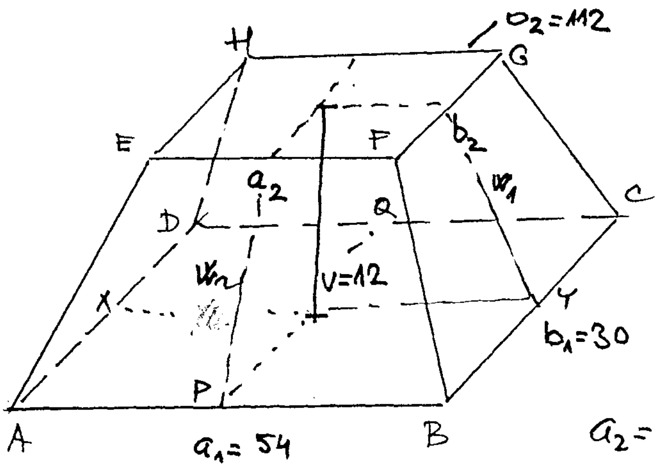
$V = \frac{1}{3} \cdot 80 \cdot \left(1024{,}999 + \sqrt{1024{,}999 \cdot 576{,}562} + 576{,}562\right)$

$V \doteq 63\,208\ cm^3$ .. $\boxed{V \doteq 63{,}2\ dm^3}$

Příklad 4: Podstavy čtyřbokého komolého jehlanu se stejně dlouhými pobočnými hranami jsou obdélníky. Rozměry dolní podstavy jsou $a_1 = 54$, $b_1 = 30$. Obvod horní podstavy je $o_2 = 112$. Výška tohoto tělesa je $v = 12$. Vypočítejte objem a povrch (nejdříve si prohlédni řešení na str. 3.)



Délky hran a_2, b_2 určíme pomocí poměru obvodů. Poměr obvodů je stejný jako poměr stran obdélníků.



$$\frac{o_1}{o_2} = \frac{2(54+30)}{112} = \frac{168}{112} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{o_2}{o_1} = \frac{2}{3}$$

$a_2 = \frac{2}{3}\cdot 54 = 36$, $b_2 = \frac{2}{3}\cdot 30 = 20$

$a_2 = 36$, $b_2 = 20$ $S_1 = 54\cdot 30 = 1620$, $S_2 = 36\cdot 20 = 720$

S_2 lze též určit: $1620\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 720$

$$V = \frac{1}{3} v \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot 12 \left(1620 + \underbrace{\sqrt{1620\cdot 720}}_{=1080} + 720\right) \ldots \boxed{V = 13680}\ j^3 \text{ (krychl. jednotek)}$$

Pro výpočet povrchu není univerzální vzorec. V našem případě:

$$S = S_1 + S_2 + \underbrace{S_{pl}}_{\text{obsah pláště}}$$

Určíme w_1, w_2

$w_1 = \sqrt{12^2+9^2} = \sqrt{225} = 15$ $\boxed{w_1 = 15}$

$w_2 = \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{169} = 13$ $\boxed{w_2 = 13}$

viz obr. nach. 2

2 · S lichoběžníka ABFE $= 2\cdot\frac{(54+36)\cdot 13}{2} = 1170$

2 · S " BCGF $= 2\cdot\frac{(30+20)\cdot 15}{2} = 750$

viz obr. na ch. 2

$S = S_1 + S_2 + S_{pl} = 1620 + 720 + 1170 + 750 = 4260$

$\boxed{S = 4260}$ j^2 (čtverečných jednotek)