30 b) **ROVNICE A NEROVNICE S KOMPLEXNÍ PROMĚNNOU**

Kvadratická rovnice s komplexními koeficienty

$$\underbrace{i}_{a}x^2+\underbrace{2}_{b}x-\underbrace{5i}_{c}=0 \qquad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{|D|}\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2a}$$

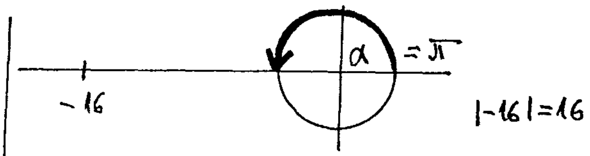
VZOREC ①

D upravíme v gon. tvaru, abychom získali α

Příklad 1 (7/188-uč.): V množině C řešte rovnici $\underset{a}{i}x^2+\underset{b}{2}x-\underset{c}{5i}=0$.

Řešení: $D=b^2-4ac=2^2-4i\cdot(-5i)=4+20i^2=4+20(-1)=4-20=-16$

Číslo -16 upravíme na goniometrický tvar:



$-16=|-16|\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)=$

$=16(\cos\pi+i\sin\pi)$

$\alpha=\pi \quad \frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{|D|}\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2a}$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{|-16|}\cdot\left(\cos\frac{1}{2}\pi+i\sin\frac{1}{2}\pi\right)}{2i}$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm4\,(0+i\cdot1)}{2i}=\frac{-2\pm4i}{2i}$$

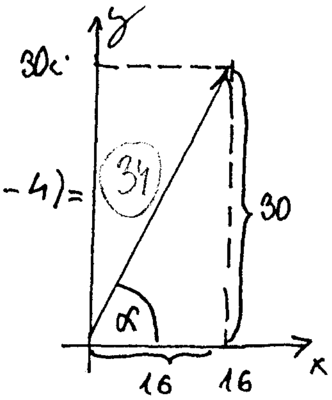
$$(+)\begin{cases} x_1=\dfrac{-2+4i}{2i}\quad\dfrac{2(-1+2i)}{2i}=\dfrac{-1+2i}{i}=\dfrac{(-1+2i)\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}=\dfrac{i+2}{1}=\boxed{2+i} \\[2ex] x_2=\dfrac{-2-4i}{2i}=\dfrac{2(-1-2i)}{2i}=\dfrac{-1-2i}{i}=\dfrac{(-1-2i)\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}=\dfrac{i-2}{1}=\boxed{-2+i}\end{cases}$$

(+) lze počítat najednou

Rovnice má kořeny (řešení): $x_1=2+i$, $x_2=-2+i$.

Příklad 2 (8/188-uč): V množině C řešte rovnici:

$$\underbrace{(1-i)}_{a}x^2\underbrace{-(5-i)}_{b}x+\underbrace{6-4i}_{c}=0$$



$D=(5-i)^2-4(1-i)\cdot(6-4i)=25-10i-1-4(6-6i-4i-4)=$

$=24-10i-4(2-10i)=24-10i-8+40i=16+30i$

$D=16+30i$, $|D|$ viz obrázek

$|D|=\sqrt{30^2+16^2}=\sqrt{1156}=34$

$$D = 16+30i = 34(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 34\cdot\left(\frac{16}{34} + i\,\frac{30}{34}\right) = 34\left(\overset{\cos\alpha}{\frac{8}{17}} + i\,\overset{\sin\alpha}{\frac{15}{17}}\right)$$

Do vzorce ① potřebuji $\frac{\alpha}{2}$, resp. $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$. K tomu použiji vzorce:

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

Protože v našem případě $\cos\frac{\alpha}{2}$ a $\sin\frac{\alpha}{2}$ jsou kladné hodnoty, tak platí:

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{8}{17}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{25}{17}}{\frac{2}{1}}} = \sqrt{\frac{25}{34}} \ldots \boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{25}{34}}}$$

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sin\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{1-\frac{8}{17}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{9}{17}}{\frac{2}{1}}} = \sqrt{\frac{9}{34}} \ldots \boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{9}{34}}}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2a} = \frac{5-i \pm \sqrt{34}\left(\sqrt{\frac{25}{34}} + i\sqrt{\frac{9}{34}}\right)}{2-2i} =$$

$$= \frac{5-i \pm \sqrt{34}\left(\frac{5}{\sqrt{34}} + i\,\frac{3}{\sqrt{34}}\right)}{2-2i} = \frac{5-i \pm (5+3i)}{2-2i}$$

$$x_1 = \frac{5-i+(5+3i)}{2-2i} = \frac{10+2i}{2-2i} = \frac{(10+2i)\cdot(2+2i)}{(2-2i)\cdot(2+2i)} = \frac{20+4i+20i-4}{4+4} =$$

$$= \frac{16+24i}{8} = \boxed{2+3i}$$

$$x_2 = \frac{5-i-(5+3i)}{2-2i} = \frac{5-i-5-3i}{2-2i} = \frac{-4i}{2-2i}\cdot\frac{2+2i}{2+2i} = \frac{-8i+8}{8} = \boxed{1-i}$$

Příklad 3 (9/189 -uč.): pod. př. 6

$x^4 + 2ix^2 + 8 = 0$

substituce: $y = x^2$

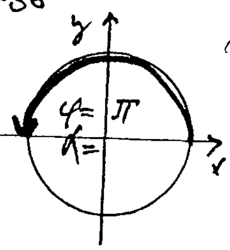
$\underset{a}{1}y^2 + \underset{b}{2i}y + \underset{c}{8} = 0$

$D = (2i)^2 - 32 = 4i^2 - 32 = -4 - 32 = -36$

ne

$D = -36$, $|D| = 36$

-36



$$-36 = 36(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$y_{1,2} = \frac{-2i \pm \sqrt{36}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{-2i \pm 6(0+1i)}{2} = \frac{-2i \pm 6i}{2} = \begin{cases} y_1 = 2i \\ y_2 = -4i \end{cases}$$

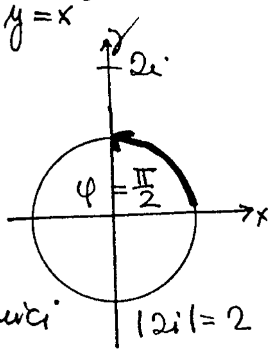
y_1, y_2 do $y = x^2$

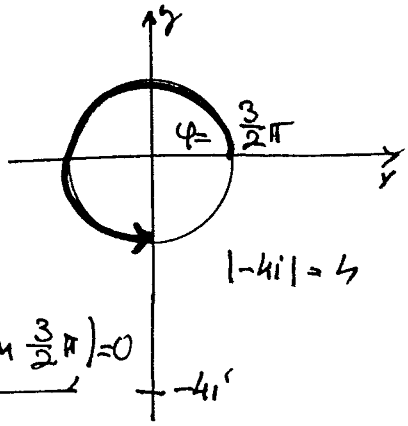
$x^2 = 2i$ $\qquad\wedge\qquad$ $x^2 = -4i$

$x^2 - 2i = 0$ $\qquad$ $x^2 + 4i = 0$

$x^2 - (+2i) = 0$ $\qquad$ $x^2 - (-4i) = 0$

jako bin. rovnici





$$\underbrace{x^2 - 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 0}_{a)} \quad\wedge\quad \underbrace{x^2 - 4\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right) = 0}_{b)}$$

a) Tyto rovnice vyřešíme. b)

$\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\qquad\qquad$ $\varphi = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

Podle vzorce ① platí:

a) $$x_k = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)$$

$x_k = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\right]$, kde $k = 0, 1$.

$\underbrace{x_0}_{k=0} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+i$ … 1. kořen: $\boxed{x_1 = 1+i}$

$\underbrace{x_1}_{k=1} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)\right]$

$x_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1-i$, označme jako x_2

$\boxed{x_2 = -1-i}$

b) $$x_k = \sqrt{4}\left(\cos\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{2}\right)$$ viz bin. rovnice, m.o. 19a)

$x_k = 2\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi+k\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi+k\pi\right)\right]$ … kde $k = 0, 1$

$x_0 = 2\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} = \sqrt{2}(-1+i)$,

označme jako $\boxed{x_3 = \sqrt{2}(-1+i)}$

$x_1 = 2\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi+\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi+\pi\right)\right] = 2\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) =$

$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2} = \sqrt{2}(1-i)$, označme $\boxed{x_4 = \sqrt{2}(1-i)}$

Příklad 4: Řešte kvadratické rovnice v oboru komplexních čísel (což neodpovídá rozsahu témat):

a) $x^2 - 4x + 5 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm i \cdot 2}{2} = \frac{2 \pm i}{1} = \begin{cases} \boxed{x_1 = 2 + i} \\ \boxed{x_2 = 2 - i} \end{cases}$$

Když je $D<0$ lze užít	vzorec $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{\lvert D \rvert}}{2a}$	2

b) $x^2 - 4x + 6 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{-2}}{2} = \frac{4 \pm 2i\sqrt{+2}}{2} = 2 \pm i\sqrt{2} = \begin{cases} \boxed{2 + i\sqrt{2}} \\ \boxed{2 - i\sqrt{2}} \end{cases}$$

c) $5x^2 - 6x + 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{10} = \frac{6 \pm 2i}{10} = \frac{3 \pm i}{5} = \frac{3}{5} \pm \frac{1}{5}i = \begin{cases} \boxed{\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i} \\ \boxed{\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i} \end{cases}$$

d) $x^2 + 2 = 0$

$x^2 = -2 \nearrow$ $x = \sqrt{-2}$

$$x = \pm i\sqrt{2} = \begin{cases} \boxed{i\sqrt{2}} \\ \boxed{-i\sqrt{2}} \end{cases}$$

e) $\dfrac{52}{x-10} + 10 + x = \dfrac{52}{10-x}$

$$\frac{52}{x-10} + \frac{10+x}{1} = \frac{-52}{x-10} \quad / \cdot (x-10)$$

$$52 + (x+10) \cdot (x-10) = -52$$

$\rightarrow$ $52 + x^2 - 100 + 52 = 0$

$x^2 = -4$

$$x_{1,2} = \pm 2i = \begin{cases} \boxed{2i} \\ \boxed{-2i} \end{cases}$$

f) $4x^2 - 8x + 5 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 80}}{8} = \frac{8 \pm \sqrt{-16}}{8} = \frac{8 \pm i\sqrt{16}}{8} = \frac{8 \pm 4i}{8} = \begin{cases} \boxed{1 + \frac{1}{2}i} \\ \boxed{1 - \frac{1}{2}i} \end{cases}$$

Poznatek: Kořeny těchto kvadr. rovnic jsou vždy čísla komplexně sdružená.

g) $3x^2 - 4x + 2$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-24}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{6} = \frac{4 \pm 2i\sqrt{2}}{6} = \frac{2 \pm i\sqrt{2}}{3} = \begin{cases} \boxed{\frac{2}{3} + i\sqrt{2}} \\ \boxed{\frac{2}{3} - i\sqrt{2}} \end{cases}$$

h) $2x^2 + 2x + 1$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{4} = \frac{-2 \pm 2i}{4} = \frac{-1 \pm i}{2} = \begin{cases} \boxed{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i} \\ \boxed{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i} \end{cases}$$

Příklad 5: Řešte v C rovnici: $\sqrt{x^2 + 8ix + 9} = -x + i$.

$$\left(\sqrt{x^2 + 8ix + 9}\right)^2 = (-x+i)^2$$

$$\cancel{x^2} + 8ix + 9 = \cancel{x^2} - 2xi - 1$$

$$8ix + 2xi = -10$$

$$10xi = -10 \quad \Big|\cdot \frac{1}{10i}$$

$$x = -\frac{10}{10i}$$

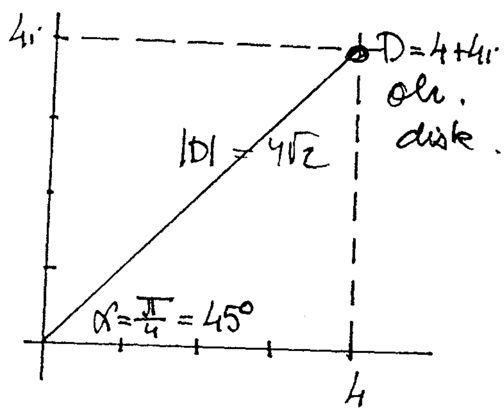
$$x = -\frac{1}{i} \quad \Big|\cdot \frac{-i}{-i}$$

$$x = \frac{i}{1} \rightarrow \boxed{x = i}$$

Příklad 6 (10/90 - uč.): Řešte v C rovnici $x^2 - 1 - i = 0$ několika postupy.

a) jako kvadratickou rovnici

$$\underset{a}{1}x^2 + \underset{b}{0}x + \underset{c}{(-1-i)} = 0 \qquad D = 0^2 - 4 \cdot 1 \, (-1-i) = 4 + 4i$$



$$|D| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{8}$$

$D = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ je gon. tvar disk.

$D = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, podle vzorce 1:

$$x_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{4.\sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{8}\pi + i\sin\frac{1}{8}\pi\right)}}{2} =$$

$$= \pm\frac{\sqrt{\sqrt{32}}}{2}\left(\cos\frac{1}{8}\pi + i\sin\frac{1}{8}\pi\right)$$

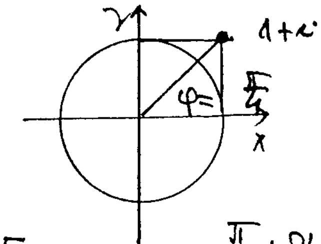
$$= \pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{1}{8}\pi + i\sin\frac{1}{8}\pi\right)$$

$x_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{1}{8}\pi + i\sin\frac{1}{8}\pi\right)$	$x_2 = -\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{1}{8}\pi + i\sin\frac{1}{8}\pi\right)$

b) jako binomickou rovnici (viz před. otázka 19a)

$x^2-1-i=0$

$x^2-(1+i)=0$



$|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

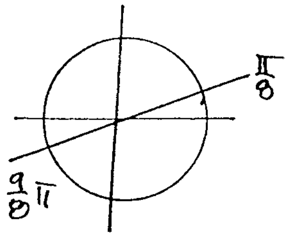
$x_k=\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right)$

$x_k=\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)\right]\dots k=0;1$

$x_1\dots \underset{k}{x_0}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)\dots$ kořen x_1

$x_2\dots \underset{k}{x_1}=\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}+\underset{1}{k}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\underset{1}{k}\pi\right)\right]$

$x_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9}{8}\pi+i\sin\frac{9}{8}\pi\right)$



$x_1=\sqrt[4]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}\right)$

$x_1=-\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\dots$ kořen x_2

---

c) algebraickou cestou

$x^2-1-i=0$

Sub. $x=a+bi$

$(a+bi)^2-1-i=0$

$(a+bi)^2=1+i$

$a^2+2abi-b^2=1+i$

$(a^2-b^2)+2abi=1+1i$

$a^2-b^2=1 \wedge 2ab=1$

$a=\frac{1}{2b}$, dosadí do levé

$\left(\frac{1}{2b}\right)^2-b^2=1$

$\frac{1}{4b^2}-b^2=1 \quad |4b^2$

$1-4b^4=4b^2$

$4b^4+4b^2-1=0$

Sub. $b^2=y$

$4y^2+4y-1=0$

$y_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{32}}{8}=$

$y_1=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$

$y_2=\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$

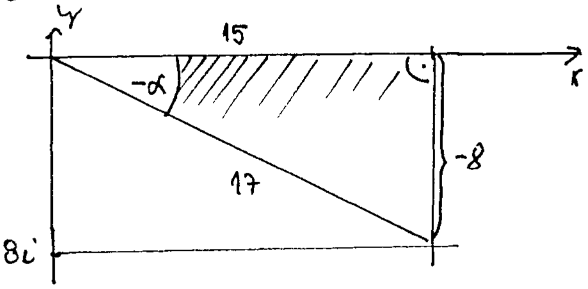
atd. viz text v uč. na str. 91 dole (nedělej)

Příklad 7 (3.11c 193-uč.): V množině $\mathbb{C}$ řešte rovnici:

MC

$x^2+(2-3i)x-5(1+i)=0$

$D=(2-3i)^2+20(1+i)=4-12i-9+20+20i=15-8i$



$|D|=\sqrt{15^2+8^2}=17$

$D=15-8i=17\left(\underbrace{\frac{15}{17}}_{\cos\alpha}-\frac{8}{17}i\right)$

$\cos(-\alpha)=\frac{15}{17}$

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{-8}{17}=\frac{8}{17}$

Sub.: $-\alpha=\varepsilon$

$\boxed{\cos\varepsilon=\frac{15}{17}}$, $\boxed{\sin\varepsilon=\frac{8}{17}}$

$\left|\cos\frac{\varepsilon}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\varepsilon}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{15}{17}}{2}}=\sqrt{\frac{16}{17}}=\frac{4}{\sqrt{17}}$ Podle obr. platí: $\boxed{\cos\frac{\varepsilon}{2}=+\frac{4}{\sqrt{17}}}$

$\left|\sin\frac{\varepsilon}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\varepsilon}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{15}{17}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{17}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$ ... −"− ... $\boxed{\sin\frac{\varepsilon}{2}=-\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$$x_{12}=\frac{-(2-3i)\pm\sqrt{17}\cdot\left(\cos\frac{\varepsilon}{2}-\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)}{2}=\frac{-2+3i\pm\sqrt{17}\left[\frac{4}{\sqrt{17}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)i\right]}{2}=$$

$$=\frac{-2+3i\pm\sqrt{17}\left(\frac{4}{\sqrt{17}}+i\frac{1}{\sqrt{17}}\right)}{2}=$$

$$x_1=\frac{-2+3i+4+i}{2}=\frac{2+4i}{2}=\boxed{1+2i}$$

$$x_2=\frac{-2+3i-4-i}{2}=\frac{-6+2i}{2}=\boxed{-3+i}$$

Příklad 8 (3.11d 193-uč.):

$x^2-4=3i$

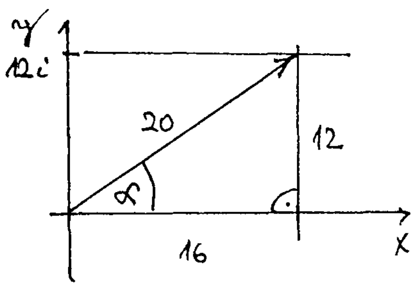
$\underset{a}{1}x^2+\underset{b}{0}x\underbrace{-4-3i}_{c}=0$

$\cos\alpha=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$, $\sin\alpha=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

$D=0^2-4\cdot(-4-3i)=16+12i$

$|D|=\sqrt{16^2+12^2}=20$

$D=16+12i=20\left(\underset{\cos\alpha}{\frac{4}{5}}+i\underset{\sin\alpha}{\frac{3}{5}}\right)$



$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \ldots \quad \boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}}$$

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \ldots \quad \boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}}$$

$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{20}\left(\frac{3}{\sqrt{10}} + i\frac{1}{\sqrt{10}}\right)}{2} = \frac{\pm \cancel{2}\sqrt{5}\left(\frac{3}{\sqrt{10}} + i\frac{1}{\sqrt{10}}\right)}{\cancel{2}} = \pm\left(3\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} + i\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\right) = \pm\left(3\sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \pm\left(3\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{cases} \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}} \\ \boxed{-\frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}} \end{cases}$$

Příklad 9 (8a,b/93-uč.): Řešte v C rovnice:

a) $x + i = \frac{1}{x} + \frac{1}{i}$

$x + i = \frac{1}{x} + \frac{1\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}$

$x + i = \frac{1}{x} + \frac{-i}{-i^2}$

$x + i = \frac{1}{x} - i \quad |\cdot x$

$x^2 + ix = 1 - ix$

$x^2 + 2ix - 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 + 4}}{2}$

$x_{1,2} = \frac{-2i \pm \sqrt{-4+4}}{2}$

$x_{1,2} = \frac{-2i \pm 0}{2}$

$\boxed{x_1 = x_2 = -i}$

b) $x^2 + 4 + \sqrt{x^2+4} = 0$ Tato rovnice má v R řešení s podmínkou, že $x^2 + 4 \geqq 0$

$x^2 \geqq -4$, v R řeš. nemá.

Existuje pouze řešení v C:

$x \geqq \sqrt{-4} \rightarrow x \geqq \pm 2i$, znak > nemá v C smysl, protože v C lze porovnávat podle velikosti pouze abs. hodnoty kompl. čísel, nikoli kompl. čísla, proto znak > vynecháme.

$x = \pm 2i \begin{cases} x_1 = 2i \\ x_2 = -2i \end{cases}$

Zkouška pro x_1:

$L = (2i)^2 + 4 + \sqrt{(2i)^2 + 4} = -4 + 4 + \sqrt{-4+4} = 0$

$P = 0$, $L = P \Rightarrow x_1 = 2i$ je řešení dané rovnice.

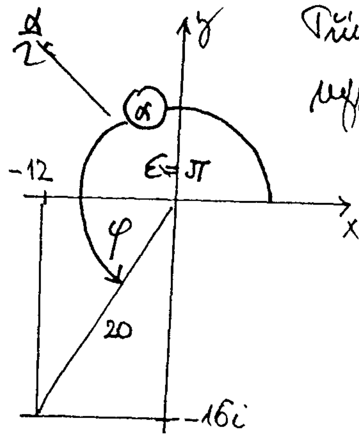
Obdobně to platí pro $x_2 = -2i$

Příklad 10 (3.186/95-uč.) V množině C řešte rovnici.

$$\underset{\downarrow\, a}{1}\, x^2 + \underbrace{2(i-1)}_{b} x + \underbrace{3+2i}_{c} = 0$$

$b = 2i - 2$

$D=(2i-2)^2-4\cdot 1\cdot(3+2i)=-4-8i+4-12-8i=-12-16i \dots \underline{D=-12-16i}$



Přímo z obrázku lze vyčíst, že $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ nebo výpočtem:

$\cos\alpha=\cos(\varepsilon+\varphi)=\cos\varepsilon\cdot\cos\varphi-\sin\varepsilon\cdot\sin\varphi=$

$\underline{\cos\pi\cdot\cos\varphi-\sin\pi\cdot\sin\varphi}=-1\cdot\frac{3}{5}-0\cdot\frac{4}{5}=-\frac{3}{5}$; $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

$\sin\alpha=\sin(\varepsilon+\varphi)=\sin\varepsilon\cos\varphi+\cos\varepsilon\sin\varphi=$

$=\sin\pi\cos\varphi+\cos\pi\sin\varphi=0\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+(-1)\cdot\frac{4}{5}=-\frac{4}{5}$

$\underline{\sin\alpha=-\frac{4}{5}}$

$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{1}{\sqrt5}$ … $\cos\frac{\alpha}{2}$ je záporný (viz obr.),

proto $\boxed{\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{\sqrt5}}$

$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt5}$ … $\sin\frac{\alpha}{2}$ je kladný,

proto $\boxed{\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\sqrt5}}$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{|D|}\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2a}=\frac{2-2i\pm\sqrt{20}\left(-\frac{1}{\sqrt5}+i\frac{2}{\sqrt5}\right)}{2}=$

$\frac{2-2i\pm2\sqrt5\left(-\frac{1}{\sqrt5}+i\frac{2}{\sqrt5}\right)}{2}=\frac{\cancel{2}\left(1-i\pm\sqrt5\left(-\frac{1}{\sqrt5}+i\frac{2}{\sqrt5}\right)\right)}{\cancel{2}}=1-i\pm(-1+2i)$

$x_1=1-i-1+2i$ … $\boxed{x_1=i}$

$x_2=1-i+1-2i$ … $\boxed{x_2=2-3i}$

NEROVNICE

Rovina, v níž znázorňujeme komplexní čísla, se nazývá Gaussova rovina.

Příklad 11: Určete abs. hodnotu rozdílu dvou komplexních čísel $z_1=3+2i$, $z_2=-2+4i$:

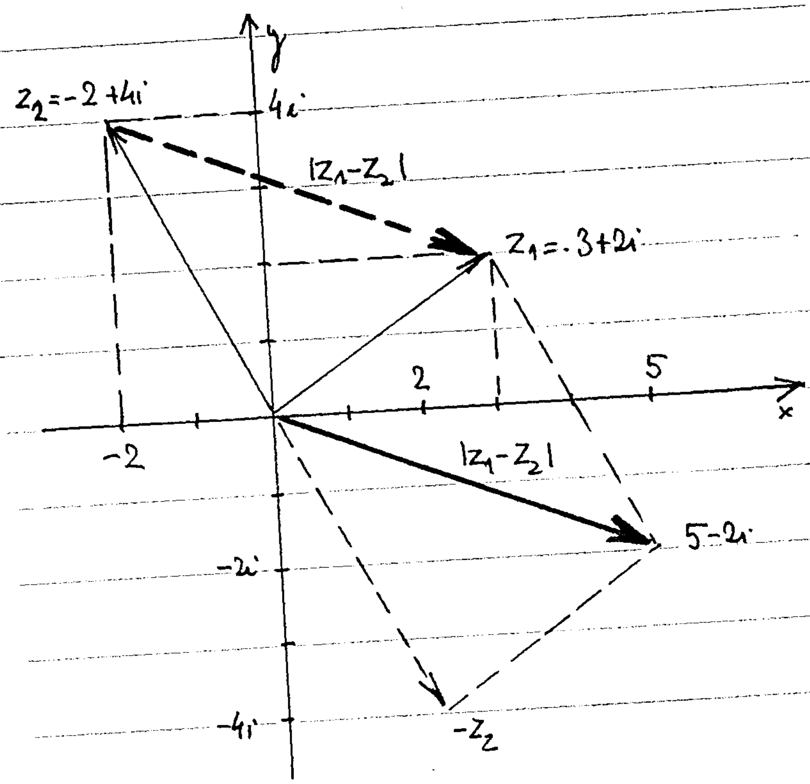
a) algebraicky, b) graficky, c) výpočtem pomocí vzorce.

a) $|z_1 - z_2| = |(3+2i) - (-2+4i)| = |3+2i+2-4i| = |5-2i|$

b) $|z_1 - z_2| =$

$= |z_1 + (-z_2)|$

Vyznačíme obraz čísla $z_1, z_2, -z_2$ a provedeme vektorový součet čísla z_1 a opačného k z_2.
Z obrázku je zřejmé, že absolutní hodnota rozdílu komplexních čísel práve jejich vzdálenost v Gaussově rovině.



c) $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

$\quad\; 3 + 2i \qquad\qquad -2 + 4i$

$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$

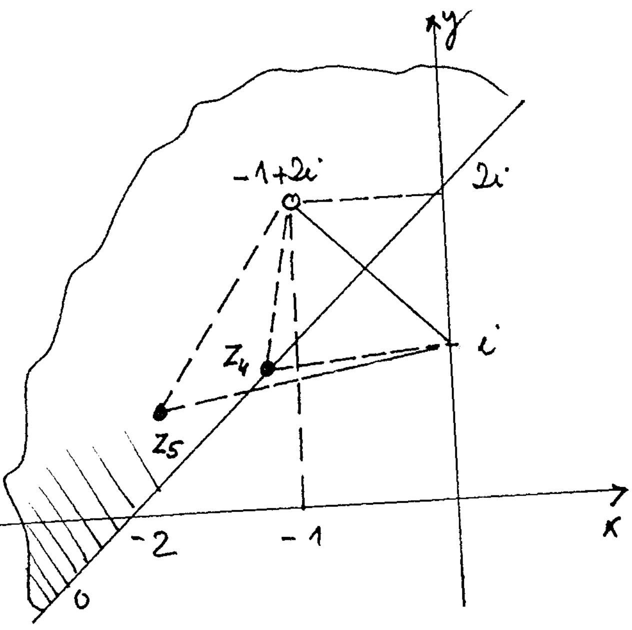
$|z_1 - z_2| = \sqrt{(3+2)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29} \doteq 5{,}4$

Příklad 12: V Gaussově rovině zobrazte všechna komplexní čísla z, pro něž platí: $|z - i| \geq |z + 1 - 2i|$

Řešení: $\underbrace{|z-i|}_{\text{Tento výraz představuje vzdálenost kompl. čísla } z \text{ od čísla } i.} \geq \underbrace{|z-(-1+2i)|}_{\text{vzdálenost } z \text{ od čísla } (-1+2i)}$

Čísla i a $(-1+2i)$ zobrazíme.

Vyznačíme úsečku, jejíž krajní body jsou obrazy těchto čísel. Sestrojíme osu souměrnosti této úsečky. Každý bod této osy je stejně vzdálen od krajních bodů této úsečky.



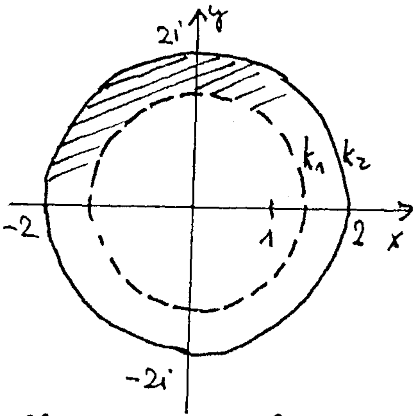
Všechna kompl. čísla z představují množinu obrazů čísla z, kterou je vyšrafovaná polorovina včetně hraniční přímky. Do této množiny patří např. čísla z_4, z_5 (viz obr.)

Příklad 13: Zobrazte množinu obrazů všech komplexních čísel z, je-li

a) $\frac{3}{2} < |z| \leqq |\sqrt{3} - i|$

$\frac{3}{2} < |z-0| \leqq \sqrt{4}$

$\frac{3}{2} < |z-0| \leqq 2$

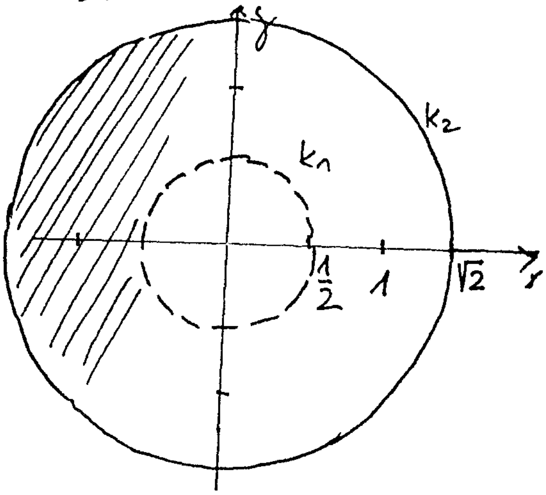


Obrazy kompl. čísel z vytvoří mezikruží s poloměry $r_1 = 1{,}5$ kružnice k_1 a $r_2 = 2$ kružnice k_2, avšak bez k_1.

b) $|1+i| \geqq |z| > \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < |z| \leqq |1+i|$

$\frac{1}{2} < |z| \leqq \sqrt{2}$



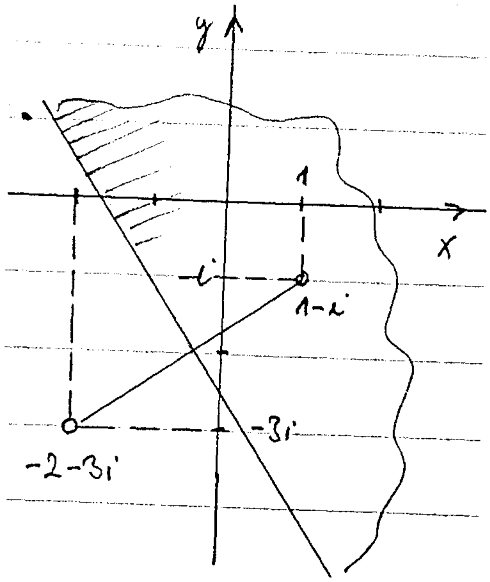
Mezikruží určené k_1 s poloměrem $r_1 = \frac{1}{2}$ a k_2 s poloměrem $r_2 = \sqrt{2}$ – bez k_1.

---

c) $|z - 1 + i| \leqq |z + 2 + 3i|$

$|z - (1-i)| \leqq |z - (-2-3i)|$

Množinou obrazů všech komplexních čísel z je polorovina s hraniční přímkou o, která je osou úsečky s krajními body, které jsou obrazy kompl. čísel $(1-i)$ a $(-2-3i)$ – viz obr.



---

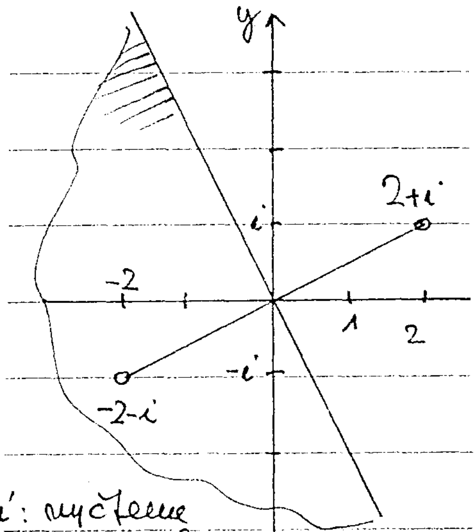
d) $$\left|z-\frac{1-2i}{i}\right| \leqq \left|z+\frac{1-2i}{i}\right|$$

$$\left|z-\frac{(1-2i)\cdot i}{i\cdot i}\right| \leqq \left|z+\frac{(1-2i)\cdot i}{i\cdot i}\right|$$

$$\left|z-\frac{i-2i^2}{-1}\right| \leqq \left|z+\frac{i-2i^2}{-1}\right|$$

$$\left|z-\frac{i+2}{-1}\right| \leqq \left|z+\frac{i+2}{-1}\right|$$

$$|z-(-2-i)| \leqq |z-(2+i)|$$



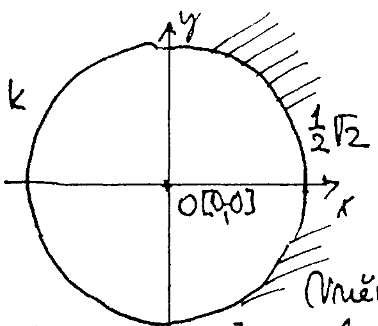
Řešení: vyčteme z obrázku

f) $$\frac{1}{|1-i|} \leqq |z|$$

$$|z| \geqq \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$|z| \geqq \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow |z| \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|z| \geqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$$



$k\,[[0;0];\ r=\frac{1}{2}\sqrt{2}]$

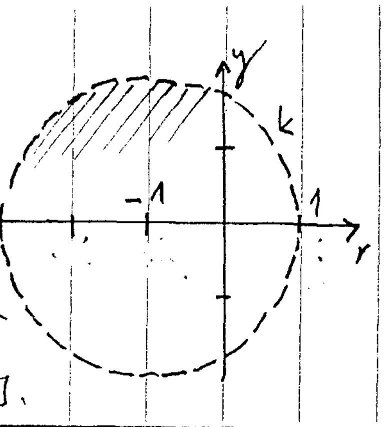
Vnější oblast kruhu včetně kružnice $\underline{k}$.

e) $|1+z|<2$

$|z+1|<2$

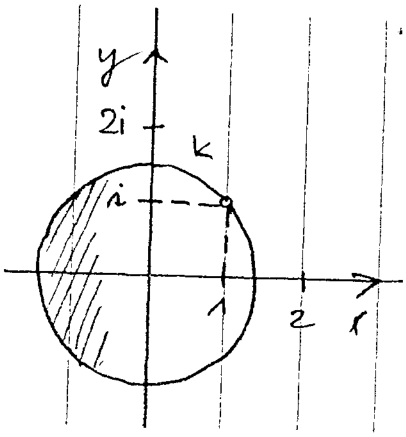
$|z-(-1)|<2$

Vnitřní oblast kruhu bez kružnice k s poloměrem $r=2$ a středem $[-1;0]$.



f) $|z-(1+i)| \leqq 1$

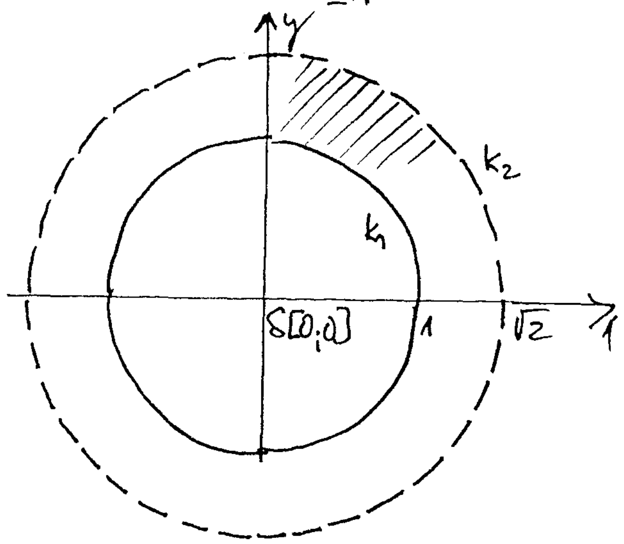
Vnitřní oblast kruhu včetně kružnice $\underline{k}$ se středem $[0,0]$ a poloměrem $r=\sqrt{2}$.



g) $|1-i| > |z| \geqq 1$

$|z| < |1-i| \ \wedge\ |z| \geqq 1$

$|z| < \sqrt{2} \ \wedge\ |z| \geqq 1$



...mezikruží ohraničené kružnicemi $k_1[S;1]$, $k_2[0;\sqrt{2}]$ bez $\underline{k_2}$