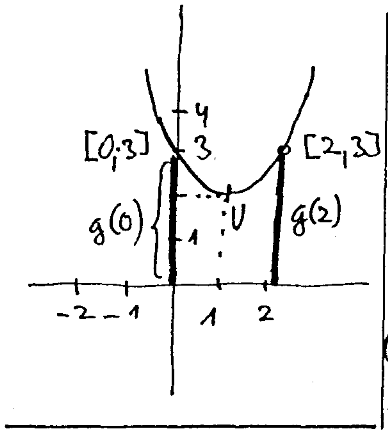


__Řešení b)__

$g(x): y = x^2 - 2x + 3$

$g(-1): y = (-1)^2 - 2.(-1) + 3$

$y = 6$

$y = y$

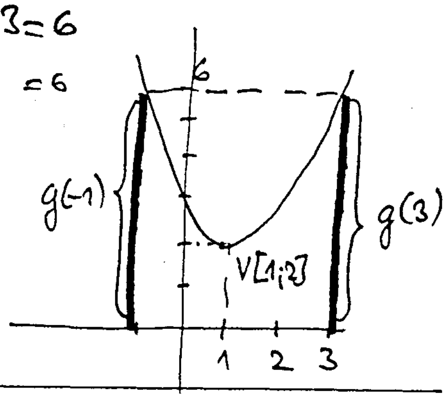
$x^2 - 2x + 3 = 6$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 3 \\ -1 \end{array} \right.$

Pro $x_1 = 3$ je $y = 3^2 - 2.3 + 3 = 6$

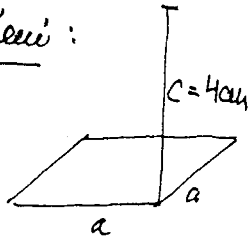
Pro $x_2 = -1$ je $y = 1 + 2 + 3 = 6$

$V\left[-\frac{-2}{2} ; 3 - \frac{4}{4}\right] .. V[1;2]$



__Příklad 20:__ Kvádr má čtvercovou podstavu s hranou délky $\underline{a}$ a s výškou 4 cm. Zapište funkci, která vyjadřuje
a) závislost objemu kvádru na délce hrany podstavy,
b) " povrchu kvádru " " " " .

__Řešení:__



a) $V = a^2 . 4$

$\boxed{V = 4a^2}$ $a \in (0, \infty)$ nebo

$f: y = 4x^2, Df: x \in (0; \infty)$

$S = 2(ab + ac + bc)$

$S = 2(aa + a.4 + a.4)$

$S = 2(a^2 + 8a)$

$\boxed{S = 2a^2 + 16a}$ $Df: a \in (0; \infty)$

$y = 2x^2 + 16x$

__Definice:__ __Lineární lomená funkce__ se nazývá každá funkce na množině $R - \{-\frac{d}{c}\}$ vyjádřená ve tvaru

$$\boxed{y = \frac{ax + b}{cx + d}},$$

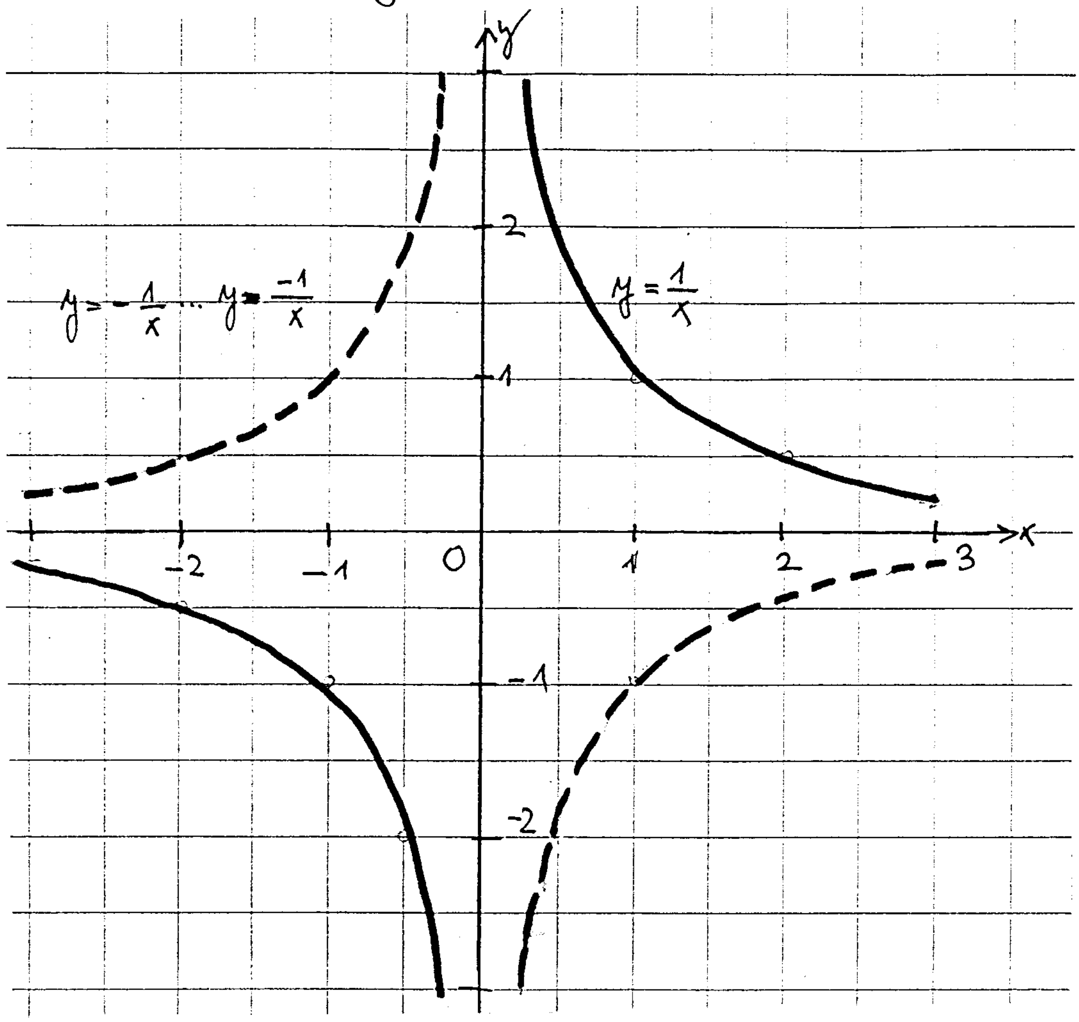
kde $a, b, c, d \in R \wedge c \neq 0$ a $ad - bc \neq 0$.

Nepřímá úměrnost se nazývá každá funkce na množině $R - \{0\}$ vyjádřená ve tvaru

$y = \frac{k}{x}$, kde $k \in R - \{0\}$

Příklad 21: Sestrojte grafy funkcí $y=\frac{1}{x}$ a $y=-\frac{1}{x}$

Řešení:



Poznámka: Je-li $k>0$, je funkce $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ klesající v $(-\infty,0)$, v $(0,+\infty)$.

Je-li $k<0$, je tato funkce rostoucí v $(-\infty,0)$, v $(0,+\infty)$.

není omezená shora ani zdola. V žádném bodě nemá maximum ani minimum.

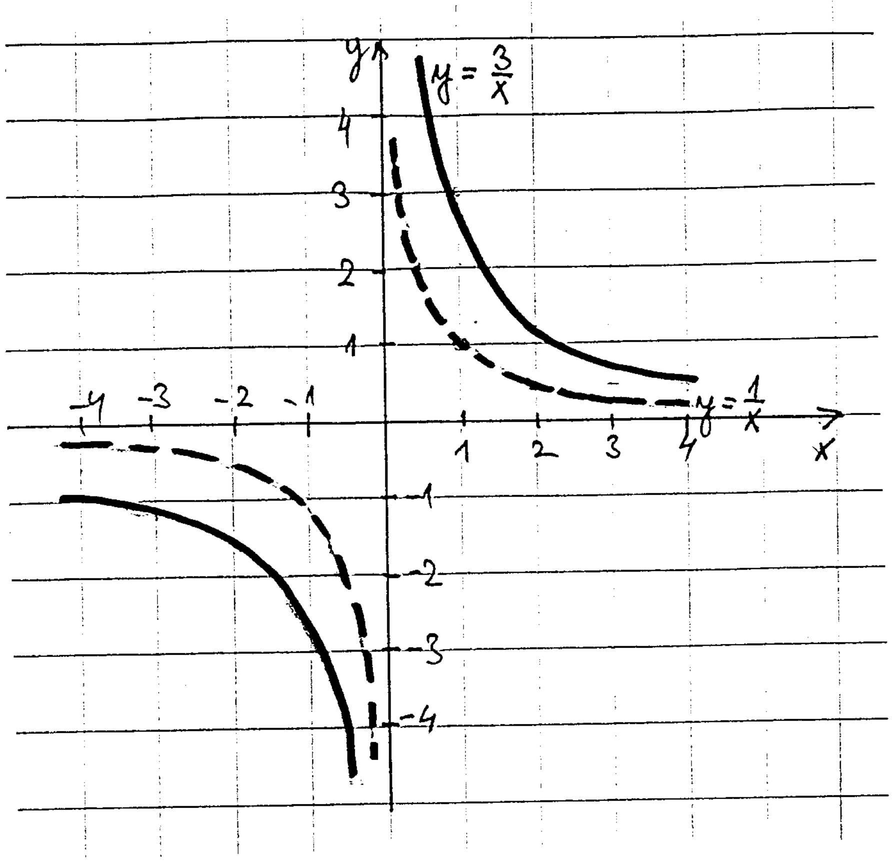
Příklad 22: Sestrojte grafy funkcí a) $y=\frac{3}{x}$, b) $\frac{4}{x}+2$, c) $y=-\frac{2}{x}+1$

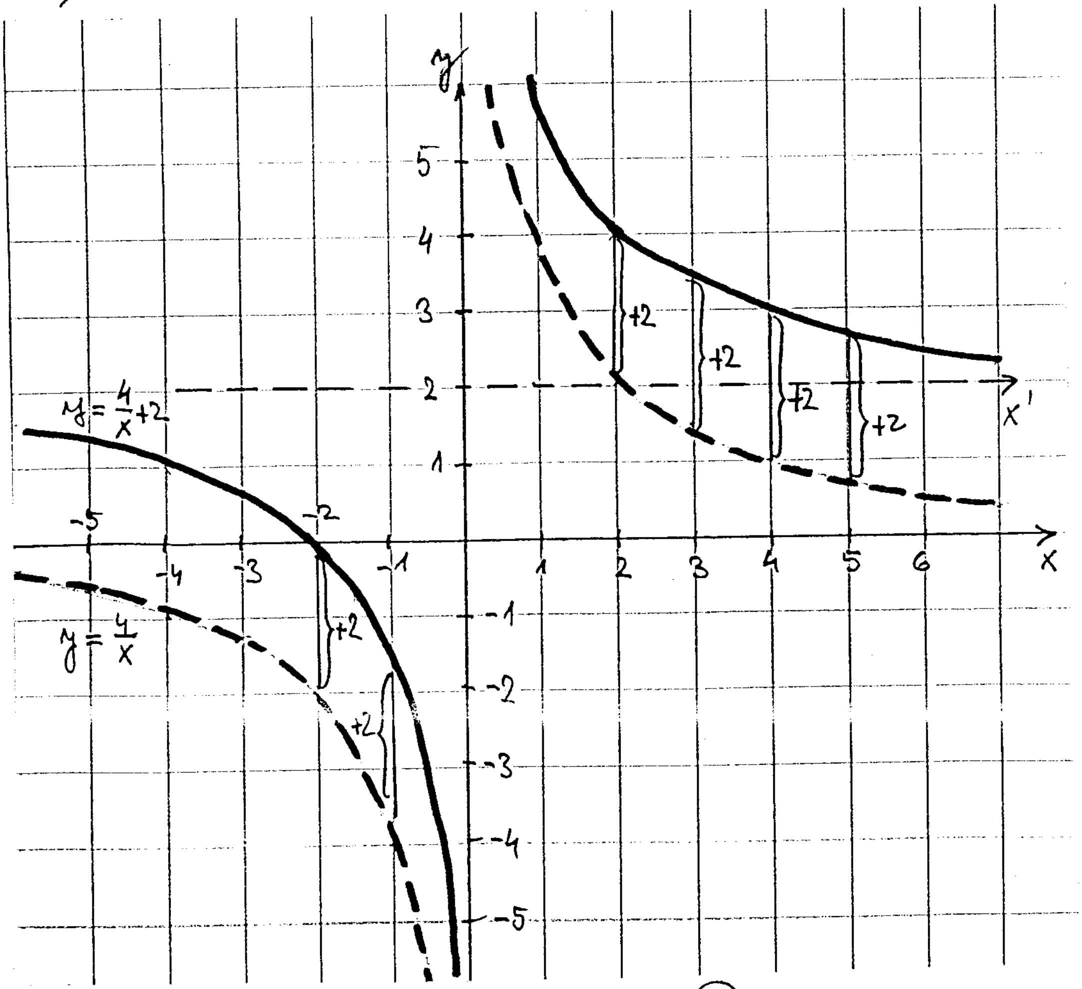
Řešení: a) $y=\frac{3}{x}$ ... $y=3\cdot\frac{1}{x}$; sestrojíme proto graf funkce $y=\frac{1}{x}$ a každou funkční hodnotu ztrojnásobíme. Lze ovšem sestavit tabulku pro $y=\frac{3}{x}$ a graf provést ihned.

b) Sestrojíme graf funkce $y=\frac{4}{x}$ a posuneme ho o 2 jednotky ve směru osy y

c) Sestrojíme graf funkce $y=-\frac{2}{x}$ a posuneme ho o(-1) ve směru osy y.

Grafy funkcí $y=\frac{4}{x}$ a $y=-\frac{2}{x}$ sestrojíme pomocí výpočtu hodnot.





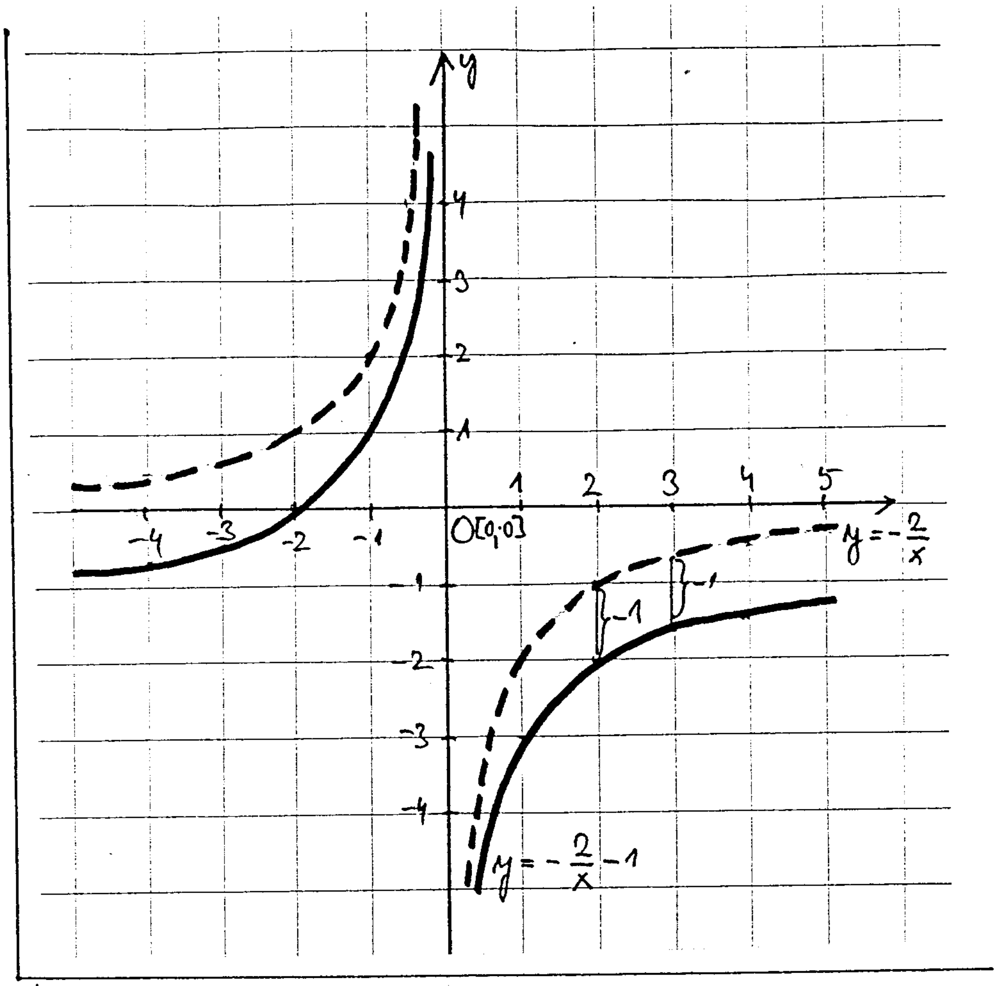
Příklad 23:

Načrtněte od ruky grafy funkcí:

a) $y = \frac{-1}{|x|}$

b) $y = \frac{x+1}{x}$

c) $y = \frac{|x|}{x^2}$



Řešení:

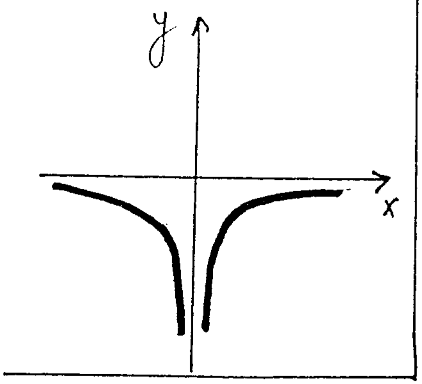
a) Je-li $x > 0$, pak

$y = \frac{-1}{x} \dots y = -\frac{1}{x}$

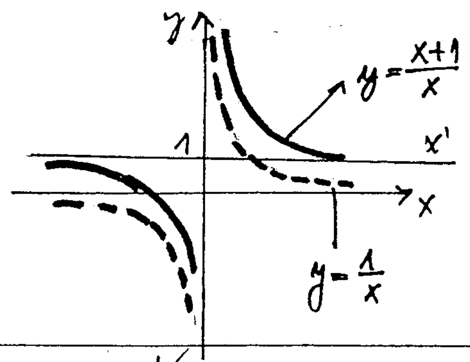
Je-li $x < 0$, pak

$|x| = -x$ a

$y = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

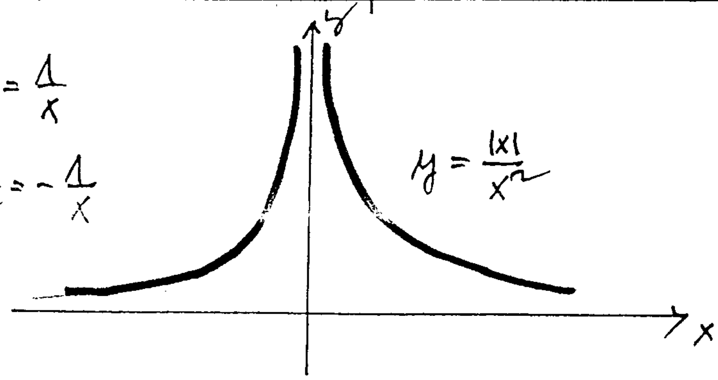


b) $y = \frac{x+1}{x} \dots y = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} \dots y = \frac{1}{x} + 1$



c)

$$y = \frac{|x|}{x^2} \begin{cases} y = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \\ y = \frac{-x}{x^2} = -\frac{1}{x} \end{cases}$$



Příklad 24: Ve třídě je nejméně 12 a nejvýše 35 žáků, kteří budou vysazovat 100 keřů. Určete funkci vyjadřující závislost mezi počtem keřů, který musí vysadit 1 žák, na počtu žáků. Vyznačte vysázení zlomku keře (keřů).

Řešení:
10 žáků ... 1 žák ... $\frac{100}{10} = 10$ keřů
⋮
25 žáků ... 1 žák ... $\frac{100}{25} = 4$ keře
⋮
x žáků ... 1 žák ... $\frac{100}{x} = y$

$\boxed{y = \frac{100}{x}}$; $Df: x \in N \wedge \underbrace{x \mid 100}_{x \text{ je dělitelem } 100} \wedge 12 \leqq x \leqq 35 \Rightarrow x \in \{20, 25\}$

Příklad 25: Vzdálenost měst A, B po silnici je 430 km. Najděte funkci, která udává, jak závisí doba jízdy t auta z A do B na jeho průměrné rychlosti v km.h^{-1}, víte-li, že $30 \text{ km.h}^{-1} \leqq v \leqq 80 \text{ km.h}^{-1}$.

Řešení: $s = v.t \rightarrow t = \frac{s}{v} \rightarrow \boxed{t = \frac{430}{v}}$

$Df: v \in \langle 30; 80 \rangle$ v km.h^{-1}, $Hf: t \in \langle 14\frac{1}{3}; 5\frac{3}{8} \rangle$ v h.

Příklad 26: Ozubené kolo s průměrem d mm vykoná n otáček za 1 min. Druhé kolo zapadající do prvního kola s průměrem 200 mm vykoná 8 otáček za 1 min. Určete závislost n na d $(120 \leqq d \leqq 600)$.

Řešení:
d (mm) ...... n otáček | NÚ
200 (mm) .... 8 otáček

$\frac{n}{8} = \frac{200}{d}$

$\boxed{n = \frac{1600}{d}}$ $Df: d \in \langle 120; 600 \rangle$

Nyní se zaměříme na lineární lomenou funkci ve smyslu definice na str. 12. Přitom využijeme poznatky o konstrukci grafů nepřímé úměrnosti.

<u>Příklad 27:</u> Sestrojte graf funkce $g: y = \frac{x+1}{x-2}$

<u>Řešení</u> provedeme 2 postupy.

<u>1. postup</u>: založený na dělení mnohočlenu mnohočlenem.

$(x+1):(x-2)=1$ ve shodě $42:5$ jako $\frac{42}{5}$

$\underbrace{\begin{array}{l} \pm x \mp 2 \\ \hline \quad 3 \end{array}}$

$42:5=8 \rightarrow 8\frac{2}{5}$

2

$y = 1 + \frac{3}{x-2}$ Graf této funkce sestrojíme postupně:

nejdříve $g_1: y = \frac{3}{x}$, pak $g_2: y = \frac{3}{x-2}$ získáme posunutím grafu funkce g_1 o 2 jednotky ve směru kladné poloosy x.

Graf g_3 čili g získáme z grafu funkce g_2 posunutím o 1 jednotku ve směru kladné poloosy y.

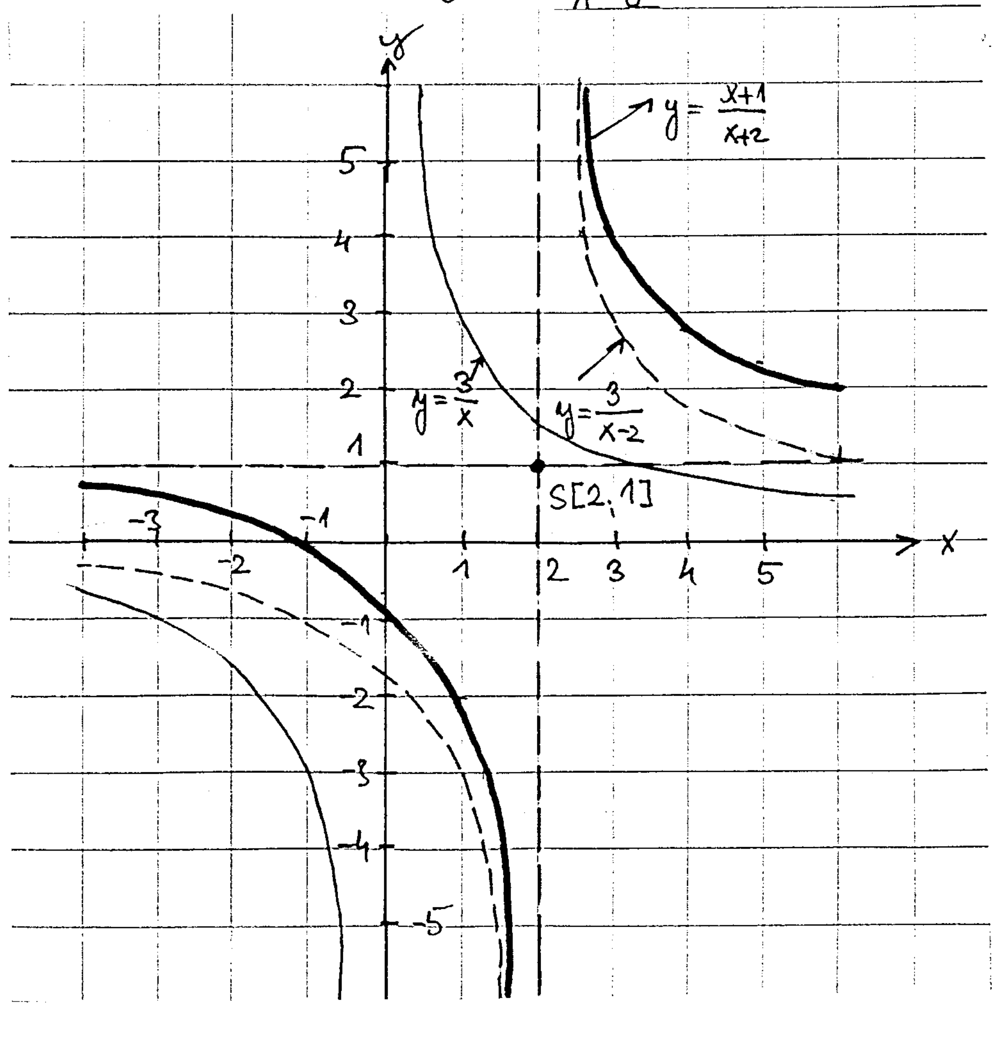
$y = 1 + \frac{3}{x-2}$ lze zapsat ve tvaru

$$\boxed{y = \frac{k}{x-m} + n},$$

kde $S[m;n]$, tedy

$y = \frac{3}{x-2} + 1$

$S[2;1]$, což je průsečík asymptot (os) grafu funkce g.



2. postup: následující úpravou na tvar $y = \frac{k}{(x-m)} + n$

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-2+3}{x-2} = \frac{(x-2)+3}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{3}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 1$$

$\downarrow$

v čitateli je třeba vytvořit stejný výraz jako ve jmenovateli:

Příklad 28: Jak byste sestrojili graf funkce $y = \frac{3x+4}{x-2}$?

Řešení 1. postupem: $(3x+4):(x-2) = 3$

$$\begin{array}{r} \underline{-3x \mp 6} \\ 10 \end{array} \qquad \frac{3x+4}{x-2} = \frac{10}{x-2} + 3 \; ; \; S[2;3]$$

Nejdříve sestrojíme graf funkce $y = \frac{10}{x}$ a posuneme ho o 2 jednotky ve směru kladné poloosy x a o 3 jednotky ve směru kladné poloosy y.

Řešení 2. postupem (podle prof. Orla)

$y = \frac{3x+4}{x-2} \; \dots \; \frac{3(x+\frac{4}{3})}{x-2}$ Čitatele musím upravit tak, aby v něm byl výraz $x-2$ jako ve jmenovateli:

$\frac{4}{3}$ nahradíme výrazem, v němž je -2. Položím si otázku:

$\frac{4}{3}$ + neznámé číslo $= -2 \; \dots \; \frac{4}{3} + a = -2$ $\rightarrow$ osamostatním $\frac{4}{3}$

$$a = -2 - \frac{4}{3} \qquad \frac{4}{3} = -2 - a$$

$$a = -\frac{10}{3} \qquad \frac{4}{3} = -2 - \left(-\frac{10}{3}\right)$$

$$\frac{3(x+\frac{4}{3})}{x-2} = \quad \leftarrow \quad \boxed{\frac{4}{3} = -2 + \frac{10}{3}}$$

$$= \frac{3(x-2+\frac{10}{3})}{x-2} = \frac{3[(x-2)+\frac{10}{3}]}{x-2} = \frac{3(x-2)+10}{(x-2)} = \frac{\cancel{3(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} + \frac{10}{(x-2)} =$$

$$= \frac{10}{x-2} + 3 \quad \dots \quad y = \frac{10}{x-2} + 3 \Rightarrow S[2;3] \dots \text{průsečík asymptot}$$

Poznámka: na další stránce.

Příklad 29:

Jak lze sestrojit graf funkce $f: y = \dfrac{6x+3}{8-4x}$

$\boxed{\text{1. postup:}}$

$$\frac{6x+3}{8-4x} = \frac{6\left(x+\frac{3}{6}\right)}{-4(x-2)} = \frac{6\left(x+\frac{1}{2}\right)}{-4(x-2)} \quad (*)$$

Požaduji $\frac{1}{2}$ nahradit rovnocenným výrazem, ve kterém je číslo (-2).

Platí:

$$\frac{1}{2} + a = -2 \quad (1)$$

$$a = -2{,}5$$

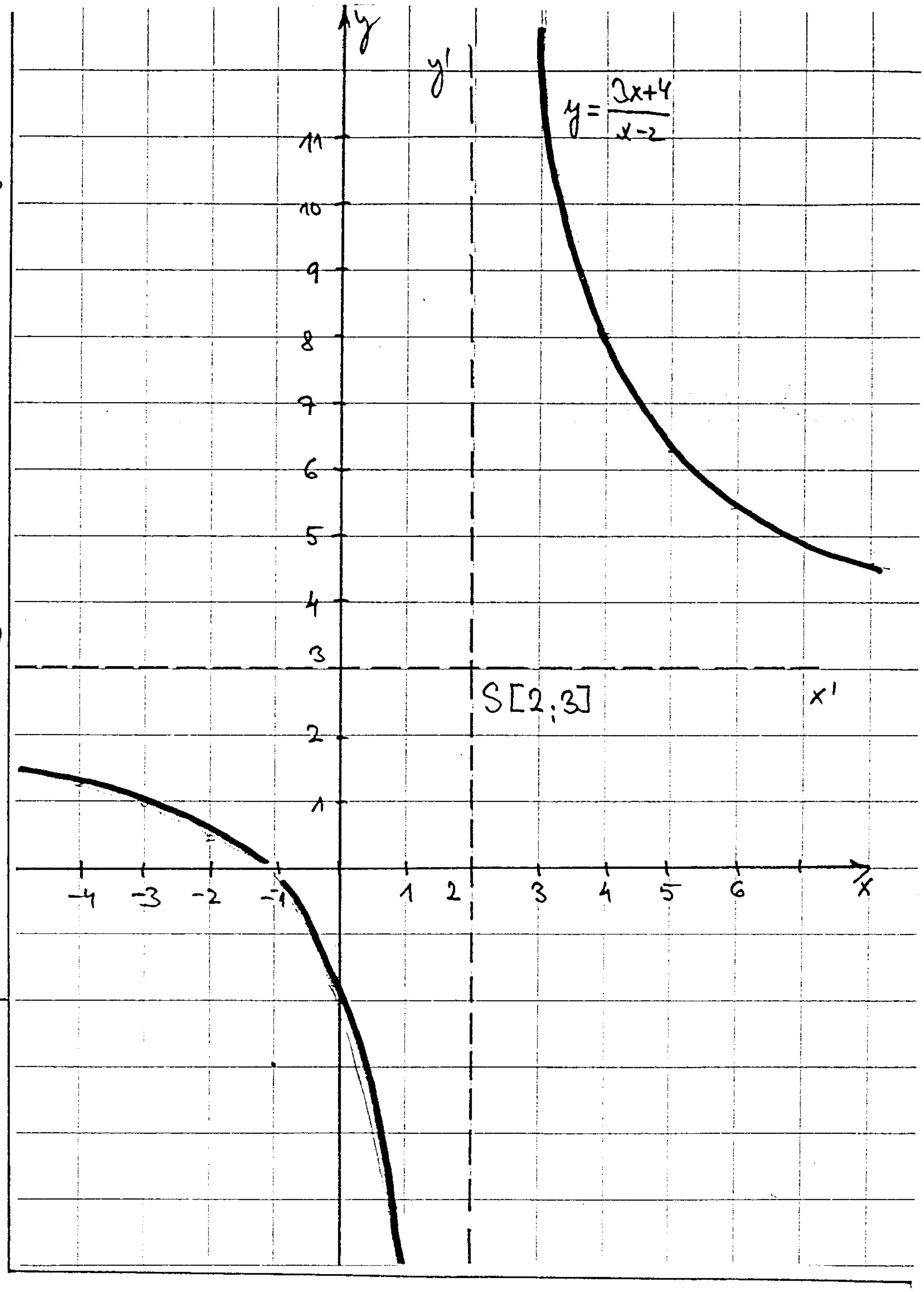
Zároveň platí z (1)

$$\frac{1}{2} = -2 - a$$

$$\frac{1}{2} = -2 - (-2{,}5)$$

$$\boxed{\frac{1}{2} = -2 + 2{,}5}$$

nahradím (*) a zkrátím $\dfrac{6}{-4} = \dfrac{3}{-2}$



$$\frac{3(x-2+2{,}5)}{-2(x-2)} = \frac{3(x-2)+7{,}5}{-2(x-2)} = \frac{3\cancel{(x-2)}}{-2\cancel{(x-2)}} + \frac{7{,}5}{-2(x-2)} =$$

$$= -\frac{3}{2} - \frac{3{,}75}{x-2}, \text{ tedy } y = \underbrace{-\frac{3{,}75}{x-2} - \frac{3}{2}}_{S[2;-1{,}5]}$$

$\boxed{\text{2. postup}}$ dělením, viz další stránka (jednodušší).

$(6x+3):(-4x+8) = -\frac{3}{2} \quad \dots \quad y = -\frac{3}{2} + \frac{15 \;|:2}{-4x+8 \;|:2} = -\frac{3}{2} + \frac{15:2}{(-4x+8):2} =$

$\pm 6x \mp 12$

15

$= -\frac{3}{2} - \frac{7{,}5}{-2x+4} = -\frac{3}{2} + \frac{7{,}5}{-2(x-2)} = -\frac{3}{2} - \frac{3{,}75}{x-2}$

$$\boxed{y = -\frac{3{,}75}{x-2} - \frac{3}{2}} \Rightarrow S[2; -1{,}5]$$

Nejdříve sestrojíme graf funkce $y = -\frac{3{,}75}{x}$ a posuneme ho o 2 jednotky ve směru kladné poloosy $\underline{x}$ a o 1,5 ve směru záporné poloosy y.

Nebo najdu střed $S[2; -1{,}5]$ a graf pomocí zvolené tabulky sestrojím přímo do os souřadnic s průsečíkem S.