3a) LOGARITHMICKÁ A EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

Definice 1: Exponenciální funkce se základem a je funkce na množině R vyjádřená ve tvaru

$\boxed{y=a^x}$, kde a je kladné číslo různé od 1 ($a\in R^+ \wedge a\neq 1$); $a\in R^+ - \{1\}$

Např.: $y=2^x$, $y=3^{-x}$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ jsou exponenciální funkce.

Příklad 1: Sestrojte grafy funkcí $y=2^x$, $y=2^{-x}$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

Řešení:

x	-2	-1	0	1	2	3	$4\ldots$
$y=2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$16\ldots$

$y=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$ atd.

x	-3	-2	-1	0	1	2	$3\ldots$
$y=2^{-x}$	8	4	2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

← stejný graf

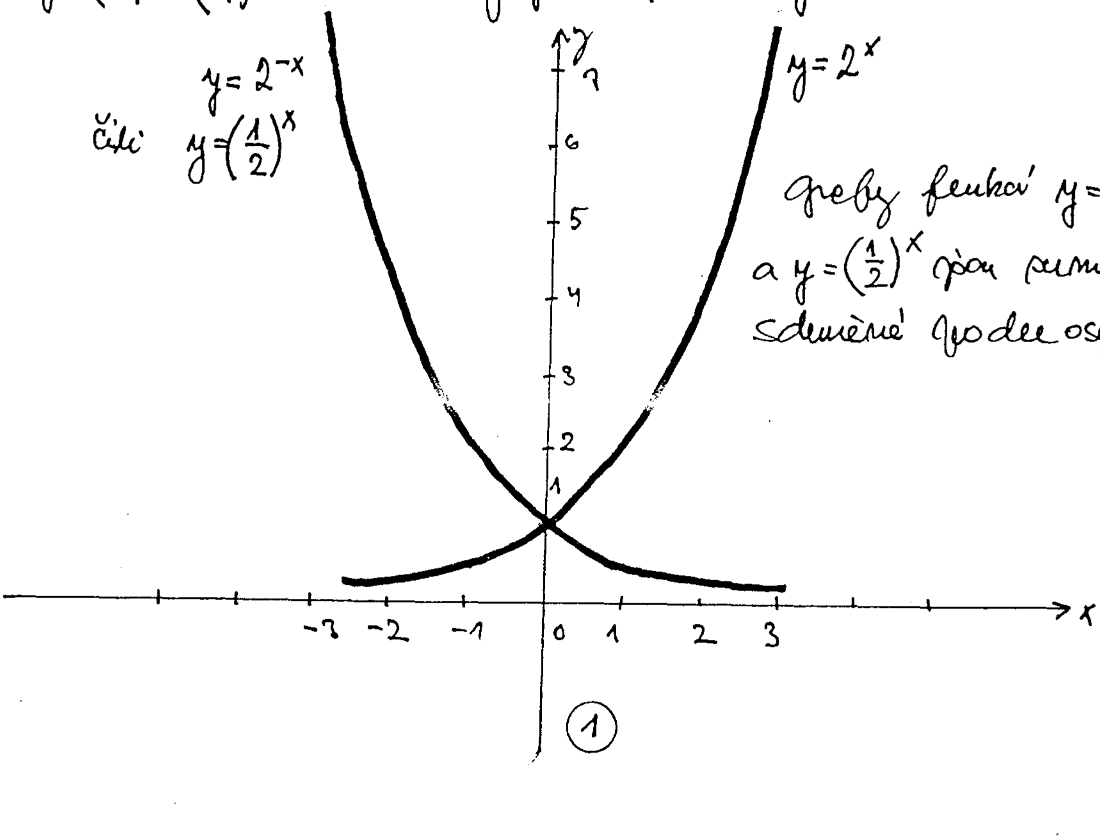
$y=2^{-(-3)}=2^3=8$

x							
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$							

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1^x}{2^x}=\frac{1}{2^x}=$

$=2^{-x}$

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=\left(\frac{2}{1}\right)^x=2^x$ stejný graf jako $y=2^x$



grafy funkcí $y=2^x$ a $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ jsou souměrně sdružené podle osy y.

Vlastnosti exponenciální funkce:

Pro funkci $y=a^x$; $a\in R^+-\{1\}$ platí

Pro $\boxed{a>1}$ je to funkce rostoucí a tedy prostá.

Pro $\boxed{0<a<1}$ je to funkce klesající, a tedy také prostá.

Definiční obor je R, obor hodnot $(0,+\infty)$

Zopakujme si: Funkce f se nazývá prostá, právě když pro $\forall x_1 \neq x_2 \in D_f$ platí: Je-li $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Příklad 2: Načrtněte od ruky grafy funkcí, určete D_f, H_f a průsečíky s osou x a y.

$\boxed{a)\ y=e^x}$ $\boxed{b)\ y=10^x}$ $\boxed{c)\ y=2^{-x}+2}$ $\boxed{d)\ y=2^x-4}$ $\boxed{e)\ y=3\cdot 2^x}$

Řešení a)

$e \doteq 2{,}7$ je základ přirozeného logaritmu

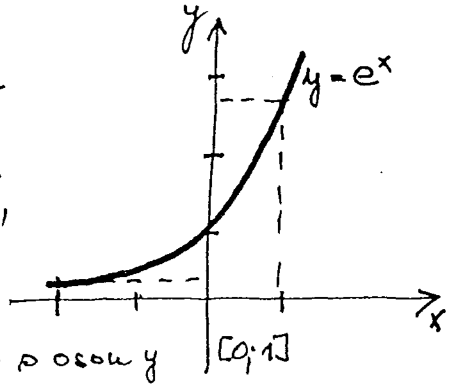
$y \doteq 2{,}7^x$ pro $x=0$ je $y=2{,}7^0=1$

pro $x=-2$ je $y=2{,}7^{-2} \doteq 0{,}36$

pro $x=1$ je $y=2{,}7$

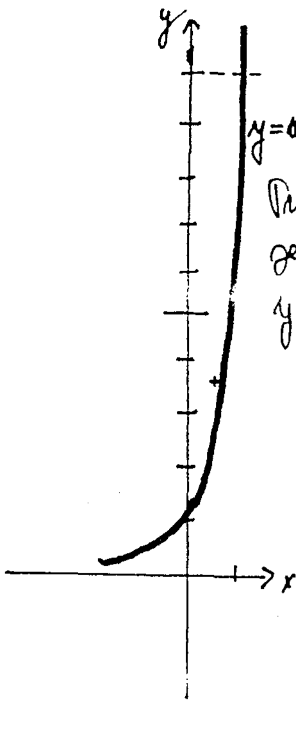
$D_f=R$

$H_f=R^+$



Průsečík jen s osou y

Řešení b: $y=10^x$



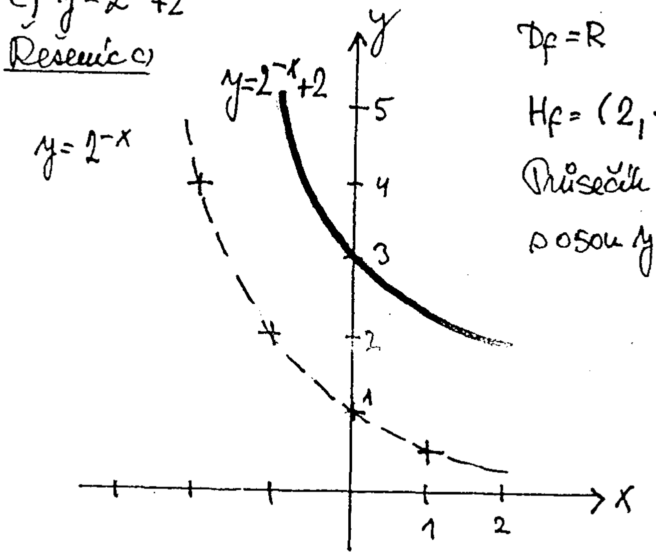
$D_f=R$

$H_f=R^+$

Průsečík jen s osou y: [0;1]

c) $y=2^{-x}+2$

Řešení c)

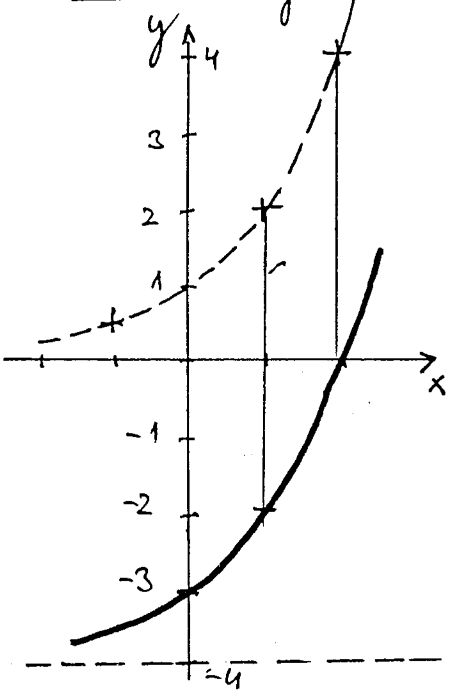


$D_f=R$

$H_f=(2,+\infty)$

Průsečík jen s osou y: [0;3]

Řešení d): $y = 2^x - 4$



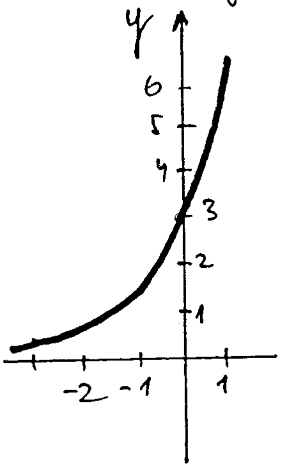
$D_f = R$

$H_f = (-4; +\infty)$

Průsečík s osou x: $[2; 0]$

" s osou y: $[0; -3]$

Řešení e) $y = 3 \cdot 2^x$



Pro $x = -3$, $y = 0{,}375$

Pro $x = -1$, $y = 1{,}5$

Pro $x = 0$, $y = 3$

Pro $x = 1$, $y = 6$

Průsečík s osou y:

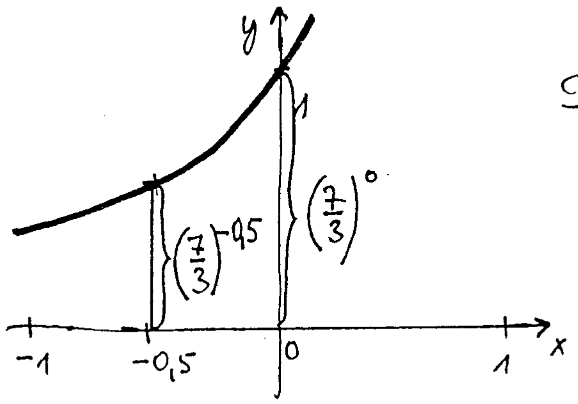
$[0; 3]$

$D_f = R$

$H_f = R^+$

Příklad 3: Dokažte, že číslo $\left(\frac{7}{3}\right)^{-0,5} < 1$

Řešení - důkaz (zdůvodnění): $y = \left(\frac{7}{3}\right)^{-0,5}$; $\frac{7}{3} > 1 \Rightarrow$ funkce je rostoucí



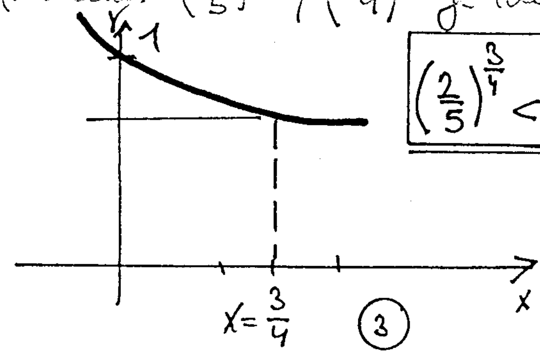
Z grafu je zřejmé, že

$$\left(\frac{7}{3}\right)^{-0,5} < \left(\frac{7}{3}\right)^{0}$$

$$\left(\frac{7}{3}\right)^{-0,5} < 1$$, tím je důkaz proveden.

Příklad 4: Která z mocnin $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$, $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{7}}$ je větší či menší než 1

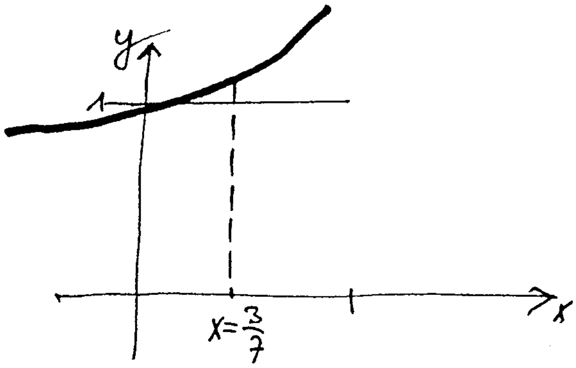
Řešení $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$; $\frac{2}{5} < 1$, funkce je proto klesající



$$\boxed{\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{4}} < 1}$$

Pokračování na str. 4

$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{7}}$; $\frac{5}{4}>$ ... funkce je rostoucí, proto $\boxed{\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{7}} > 1}$

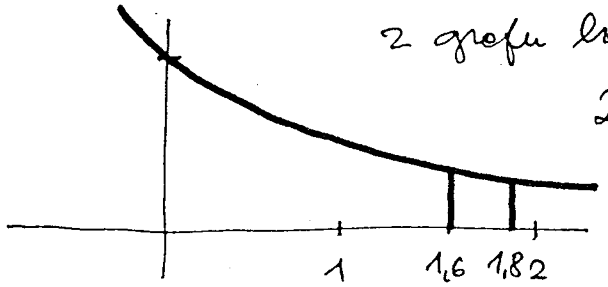


Příklad 5: Rozhodněte o pravdivosti nerovnosti $(0,4)^{1,6} < (0,4)^{1,8}$

Řešení: $0,4<1$ ... funkce je klesající,

z grafu lze zjistit, že $(0,4)^{1,6} > (0,4)^{1,8}$.

Daná nerovnost je proto nepravdivá.

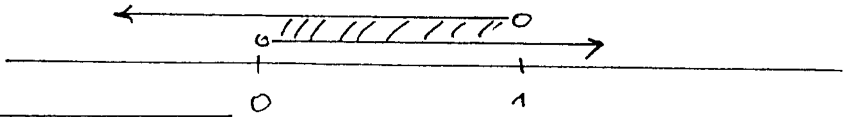


Příklad 6: Určete všechny hodnoty reálného parametru q tak, aby exp. funkce $y = \left(\frac{1}{q}\right)^x$ byla rostoucí.

Řešení: Má-li být $y=\left(\frac{1}{q}\right)^x$ rostoucí, musí platit

$$\frac{1}{q} > 1 \quad \wedge \quad \frac{1}{q} > 0$$

$q<1 \quad \wedge \quad q$ je kladné (viz def.)



$\boxed{q \in (0;1)}$ ověření: např. pro $q=0,5$: $\left(\frac{1}{q}\right)^x = \left(\frac{1}{0,5}\right)^x = 2^x$

Definice 2: Logaritmická funkce se základem a je funkce inverzní („opačná") k exponenciální funkci $y=a^x$, kde $a \in R^+-\{1\}$.

K expon. funkci $f: y=a^x$ je inverzní $f^{-1}: y=\log_a x$; $a \in R^+-\{1\}$

Doplňková „definice":

<u>Logaritmus čísla $x>0$</u> je takové reálné číslo y, kterým musíme umocnit základ $\underline{a}$ $(a>0, a\neq 1)$, abychom získali číslo x

$\log_a x = y$ $\quad \log_{10} 100 = 2$, neboť $10^2 = 100$

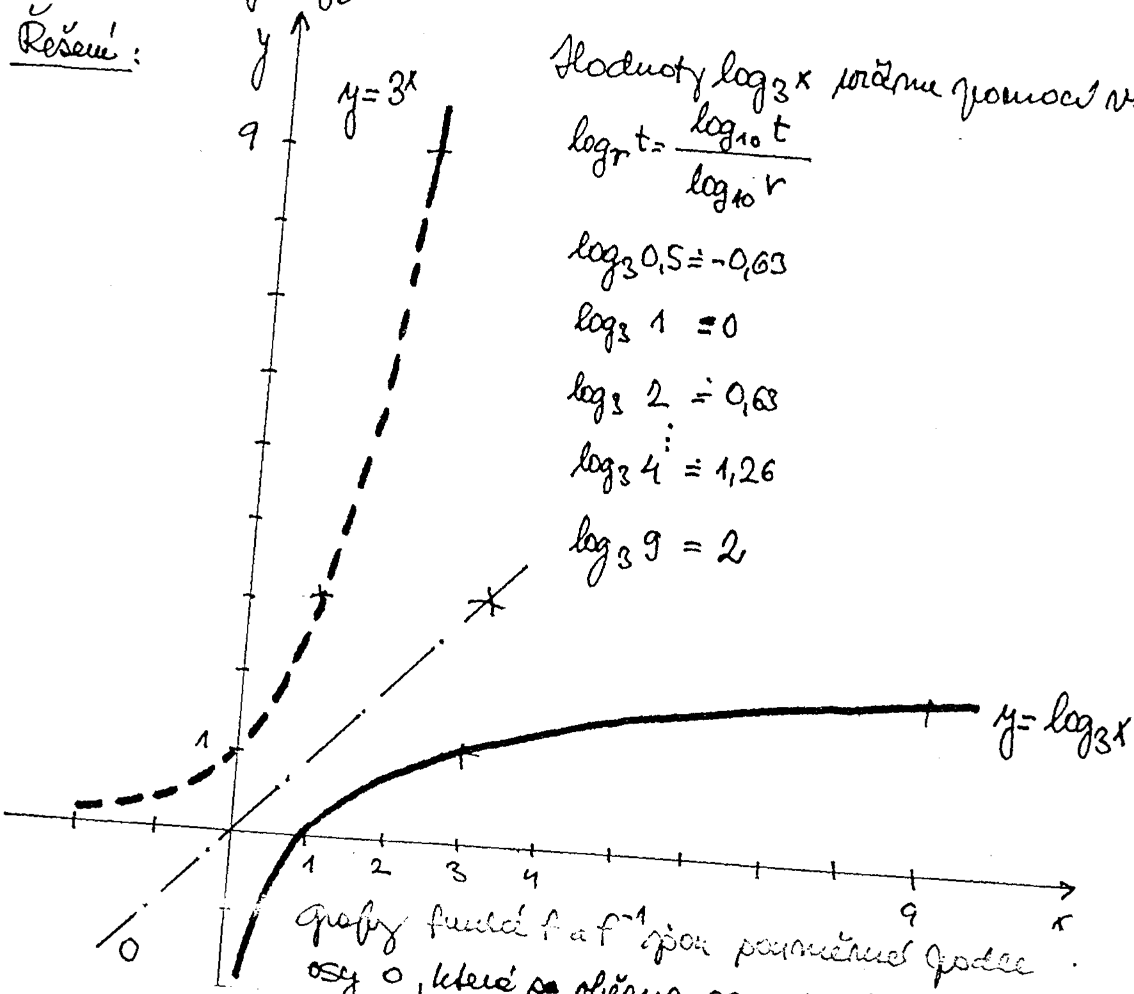
$\log_2 8 = 3$, neboť $2^3 = 8$ $\Big\}$ logaritmus = exponent

<u>Poznámka</u>: Inverzní funkci k dané funkci získáme záměnou proměnných: $f: y = 3^x \ldots f^{-1}: x = 3^y$, což přepíšeme

$y = \log_3 x$

<u>Příklad 7:</u> Sestrojte graf funkce $f: y = 3^x$ a funkce $f^{-1}: x = 3^y$, čili $y = \log_3 x$.

<u>Řešení:</u>



Hodnoty $\log_3 x$ určíme pomocí vzorce:

$$\log_r t = \frac{\log_{10} t}{\log_{10} r}$$

$\log_3 0{,}5 \doteq -0{,}63$

$\log_3 1 = 0$

$\log_3 2 \doteq 0{,}63$

$\vdots$

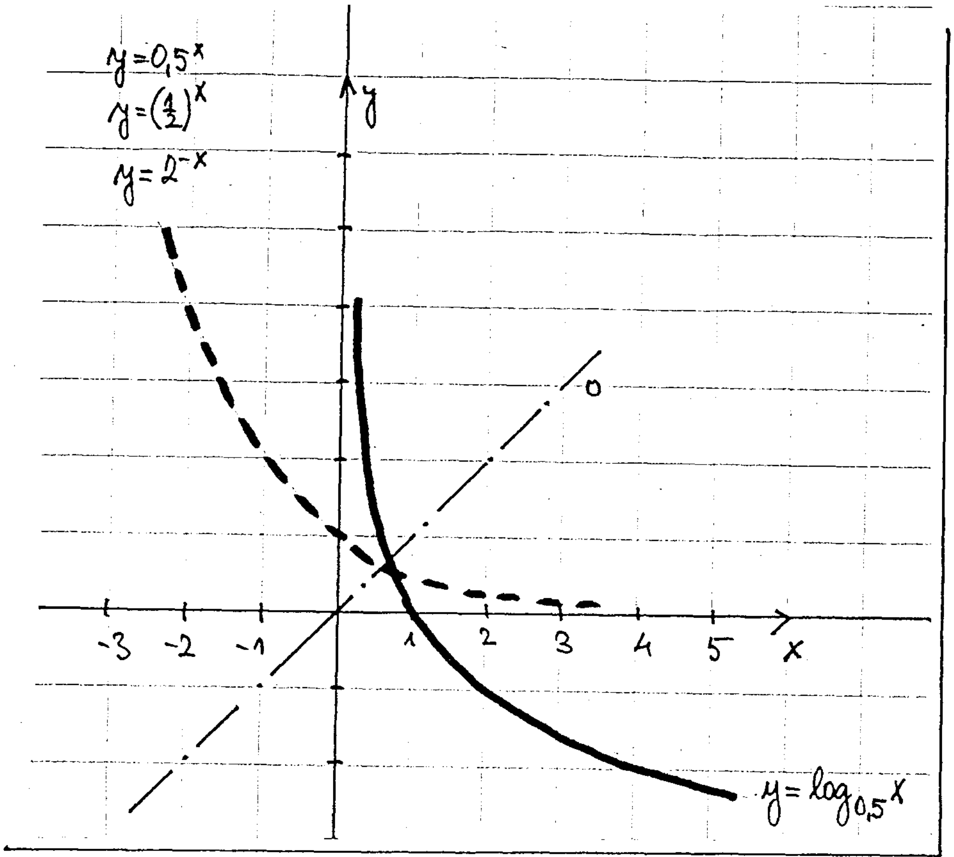
$\log_3 4 \doteq 1{,}26$

$\log_3 9 = 2$

Grafy funkcí f a f^{-1} jsou souměrné podle osy o, která se osami svírá úhel $45°$.

<u>Příklad 8:</u> Sestrojte graf funkce $f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ a funkce $f^{-1}: y = \log_{0,5} x$ či $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

<u>Řešení:</u> na další straně.



Příklad 9: Sestrojte graf funkce $y=\log_2(x-1)+2$

Řešení: nejdříve nakreslíme graf funkce $y=\log_2 x$. Je možné ho načrtnout jen tak od ruky nebo určit funkční hodnoty pomocí vzorce na str. 5.

$y=\log_2 0{,}5=\frac{\log_{10} 0{,}5}{\log 2}=-1$, $\log_2 1=0$, $\log_2 1{,}5=0{,}58$ (viz tečkovaný graf)

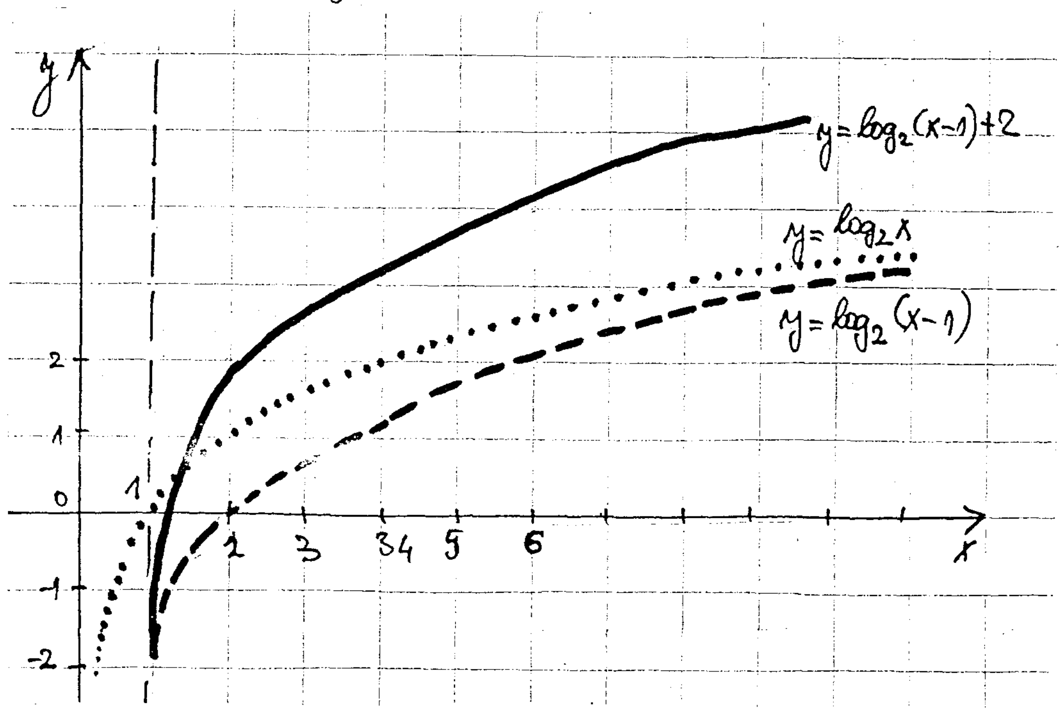
$y=\log_2(x-1)$ … tečkovaný graf se posune o +1 doprava (=čárkovaný)

$y=\log_2(x-1)+2$ je výsledný graf (plnou čarou), předchozí graf se posune o +2 ve směru osy y (nahoru).

Ověření: např. pro $x=8$

$y=\log_2(8-1)=$
$=\log_2 7\doteq 2{,}8$

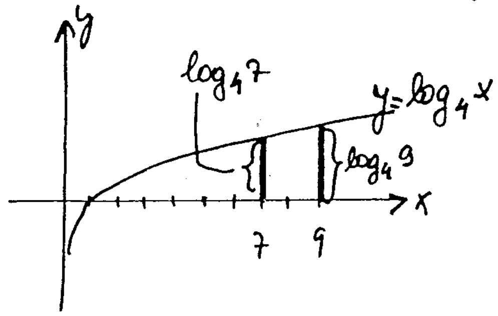
$y=\log(x-1)+2$
pro $x=4$
$y=\log_2(4-1)+2$
$=(\log_2 3)+2\doteq$
$1{,}58+2\doteq$
$3{,}58$

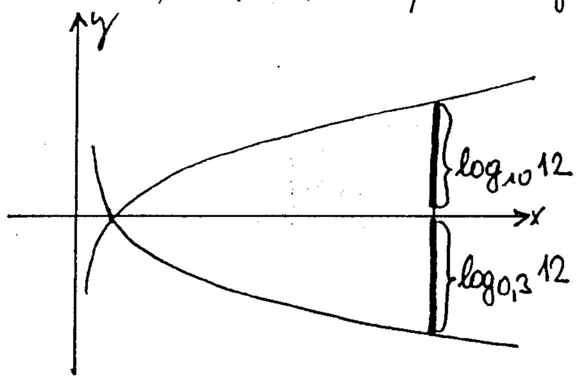


Příklad 10: Jsou následující výroky pravdivé?

a) $\log_4 7 < \log_4 9$ b) $\log_{10} 12 \leq \log_{0,3} 12$

Řešení: a) výrok je pravdivý b) výrok není pravdivý.

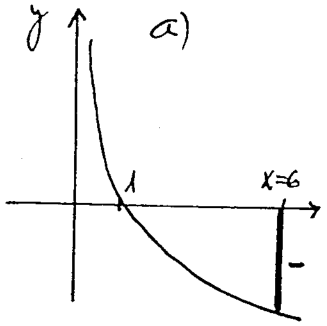




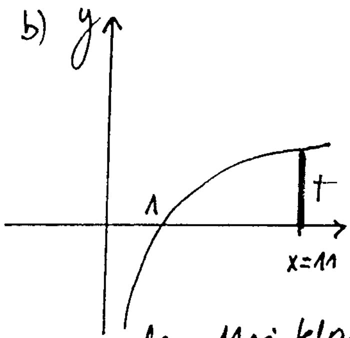
Příklad 11: Která z následujících čísel jsou kladná?

a) $\log_{0,5} 6$ b) $-\log_{14} 11$ c) $\log_7 8$

Řešení:

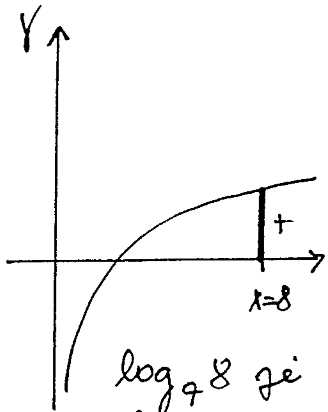


$\log_{0,5} 6$ je záporný



$\log_{14} 11$ je kladné číslo

$-\log_{14} 11$ je záporné číslo



$\log_7 8$ je kladné číslo

Příklad 12: Zjistěte definiční obory funkcí:

a) $y=\log_{10}(x+3)$ b) $y=\log_{0,5}(-x)$ c) $y=\log_5\sqrt{x-4}$ d) $y=\sqrt{\log_3 x}$

Řešení a) Protože logaritmy záporných čísel a nuly neexistují, musí platit:

$$\left.\begin{array}{l} x+3>0 \\ x>-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x \in (-3,+\infty)}$$

Řešení b): $\log_{0,5}(-x)$ ... opět $-x>0 \quad |\cdot(-1)$

$$x<0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x \in (-\infty,0)}$$