18a) LOGARITMICKÉ ROVNICE

Úvodní poznámka: Logaritmická rovnice je taková, v níž se vyskytují funkce logaritmické a exponenciální. Tato charakteristika je relativní, neboť např. rovnice

$2^{\log x} = 4$ je rovnice exponenciální a zároveň logaritmická.

$3^{\cos x} = \frac{1}{3}$ je rovnice exponenciální a zároveň goniometrická.

Proto v tomto článku budeme řešit kromě rovnic logaritmických zároveň rovnice exponenciální. Při jejich řešení využijeme vět o logaritmech.

1	$\log_a (r.s) = \log_a r + \log_a s$	např. $\log_3 (5.7) = \log_3 5 + \log_3 7$
2	$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$	např. $\log_5 \frac{4}{7} = \log_5 4 - \log_5 7$
3	$\log_a r^s = s.\log_a r$	např. $\log_5 2^3 = 3.\log_5 2$
4	$a^{\log_a x} = x$	např. $3^{\log_3 8} = 8$

5 je na str. 2 dole tohoto textu

PŘÍKLADY UVEDENÝCH ROVNIC A JEJICH ŘEŠENÍ

$\log_2 4 = x$ Řešení:	$y = \log_2 8$ Řešení:	$\log_2 16 = x$ Řešení:	$\log_{10} 100 = x$ Řešení:
$2^x = 4$ $2^x = 2^2$ $\boxed{x = 2}$	$\log_2 8 = y$ $2^y = 8$ $2^y = 2^3$ $\boxed{y = 3}$	$2^x = 16$ $2^x = 2^4$ $\boxed{x = 4}$	$10^x = 100$ $10^x = 10^2$ $\boxed{x = 2}$

$\log_3 3 = x$

Řešení:

$3^x = 3^1$

$\boxed{x = 1}$

Určete $\log 0{,}0001$

Řešení:

$\log_{10} 0{,}0001 = x$

$10^x = \frac{1}{10^4}$

$10^x = 10^{-4}$

$\boxed{x = -4}$

$\log_3 (1-2x) = 1$

Řešení:

$3^1 = 1-2x$

$2x = -2$

$\boxed{x = -1}$

$x \cdot \log_7 x = 0$

Řešení:

$x \cdot \log_7 x = 0 \quad | \cdot \frac{1}{x}$

$\log_7 x = 0$

$7^0 = x$

$\boxed{x = 1}$

$\log_3 x = \frac{3}{2}$

Řešení:

$3^{\frac{3}{2}} = x$

$x = \sqrt{3^3}$

$x = \sqrt{27}$

$\boxed{x = 3\sqrt{3}}$

$\log_x 2401 = 4$

Řešení:

$x^4 = 2401$

$x = \sqrt[4]{2401}$

$x = \pm\sqrt[4]{2401}$

$\boxed{x_1 = 7}$

$x_2 = -7$ nevyhovuje, základ log. není záporný

$\log (x-1)^2 = 0$

Řešení:

$\log_{10} (x-1)^2 = 0$

$10^0 = (x-1)^2$

$x^2 - 2x + 1 = 1$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$\boxed{x_1 = 0}$

$\boxed{x_2 = 2}$

$\log_{10} 0{,}01 = x$

Řešení:

$10^x = 0{,}01$

$10^x = \frac{1}{100}$

$10^x = \frac{1}{10^2}$

$10^x = 10^{-2}$

$\boxed{x = -2}$

$\log_{0{,}1} x = 100$

$x = 0{,}1^{100}$

$x = \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$

$x = \frac{1}{10^{100}}$

$\boxed{x = 10^{-100}}$

$\log_{0{,}1} x = -5$

Řešení:

$x = 0{,}1^{-5}$

$x = \left(\frac{1}{10}\right)^{-5}$

$\boxed{x = 10^5}$

$\log_{10} x = -0{,}5$

Řešení:

$10^{-0{,}5} = x$

$x = 10^{-\frac{1}{2}}$

$x = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\boxed{x = \frac{\sqrt{10}}{10}}$

PAMATUJ: V DEKADICKÝCH LOG. PLATÍ

$\log 10 = 1$

$\log 100 = 2$

$\log 1000 = 3$

$\vdots$

$\log 0{,}1 = -1$

$\log 0{,}01 = -2$

$\log 0{,}001 = -3$ atd.

VZOREC pro převod do dekadických logaritmů:

5 $\log_r t = \frac{\log t}{\log r}$

Příklad:

$\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$

$\doteq 1{,}261\,859\,507$

$\log_a 64 = 3$

Řešení:

$a^3 = 64$

$a = \sqrt[3]{64}$

$\boxed{a = 4}$

$\log x^3 - \log x^4 + \log x^5 = 8$

Řešení: Jde o dekadické logaritmy.

$3\log x - 4\log x + 5\log x = 8$

$4\log x = 8 \quad | :4$

$\log x = 2$

$\log_{10} x = 2$

$x = 10^2$

$\boxed{x = 100}$

Zkouška předchozí úlohy:

$L = \log 100^3 - \log 100^4 + \log 100^5 =$

$= 3 \cdot \log 100 - 4\log 100 + 5 \cdot \log 100 =$

$4\log 100 = 4 \cdot 2 = 8$

$P = 8 \quad ; \quad L = P$

$\frac{1}{2}\log x = 2\log 2$

Řešení

$\frac{1}{2}\log x = 2 \cdot \log 2 \quad | \cdot 2$

$\log x = 4 \cdot \log 2$

$\log x = \log 2^4$

$x = 2^4$

$\boxed{x = 16}$

$\log(4x+6) - \log(2x-1) = 1$

Řešení

$\log \frac{4x+6}{2x-1} = \log 10$ neboť $\log 10 = 1$

$\frac{4x+6}{2x-1} = 10 \quad | \cdot (2x-1)$

$4x+6 = 10(2x-1)$

$4x+6 = 20x-10$

$16x = 16$

$\boxed{x = 1}$

Zkouška:

$L = \log(4.1+6) -$

$- \log(2.1-1) = \log 10 -$

$- \log 1 = 1 - 0 = 1$

$P = 1 \quad ; \quad L = P$

$\log(x+3) - \log 5 = \log(x-3) - \log 2$

Řešení:

$\log \frac{x+3}{5} = \log \frac{x-3}{2}$

$\frac{x+3}{5} = \frac{x-3}{2} \quad | \cdot 10$

$2x+6 = 5x-15$

$3x = 21$

$\boxed{x = 7}$

$\frac{\log x}{1-\log 2} = 2 \quad | \cdot (1-\log 2)$

Řešení

$\log x = 2 - 2\log 2$

$\log x = \log 100 - \log 2^2$

$\log x = \log \frac{100}{2^2}$

$\log x = \log 25$

$\boxed{x = 25}$

$$(\log_3 x)^2 - 3\cdot\log_3 x - 10 = 0$$

Řešení: Substituce: $z = \log_3 x$

$$z^2 - 3z - 10 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \left\langle \begin{array}{l} z_1 = 5 \\ z_2 = -2 \end{array} \right.$$

$5 = \log_3 x_1$	$-2 = \log_3 x_2$
$x_1 = 3^5$	$x_2 = 3^{-2}$
$\boxed{x_1 = 243}$	$\boxed{x_2 = \frac{1}{9}}$

$$\frac{\log(2x+10)}{2} = \log(x+1) \qquad |\cdot 2$$

Řešení:

$$\log(2x+10) = 2\cdot\log(x+1)$$

$$\log(2x+10) = \log(x+1)^2$$

$$\cancel{2x} + 10 = x^2 + \cancel{2x} + 1$$

$$x^2 = 9$$

$$|x| = 9 \left\langle \begin{array}{l} \boxed{x_1 = 3} \\ \boxed{x_2 = -3} \text{ nevyhovuje,} \end{array} \right.$$

neboť $P = 2\cdot\log(-3+1) =$
$= 2 \log -2$ a log. záporných čísel neexistují

Zkouška:

$$L = \frac{\log(2\cdot 3+10)}{2} = \frac{\log 16}{2} = \frac{\log 4^2}{2} = \frac{2\cdot\log 4}{2} = \log 4$$

$P = \log 4$; $L = P$

$$\log(x-3) = \log 10 - \log(2-3x)$$

Řešení:

$$\log(x-3) = \log\frac{10}{2-3x}$$

$$x - 3 = \frac{10}{2-3x} \qquad |\cdot(2-3x)$$

$$(x-3)\cdot(2-3x) = 10$$

$$2x - 6 - 3x^2 + 9x - 10 = 0$$

$$-3x^2 + 11x - 16 = 0 \qquad |\cdot(-1)$$

$$3x^2 - 11x + 16 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 12\cdot 16}}{6} = \frac{11 \pm \sqrt{-71}}{6}$$

$\sqrt{-71}$ neexistuje v množině R, proto daná rovnice nemá řešení.

$$\log_2\sqrt{x+2} + \log_2\sqrt{x-1} = 1$$

Řešení:

$$\log_2(\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x-1}) = \log_2 2$$

$$\sqrt{x^2 + x - 2} = 2 \qquad |\text{umocníme}$$

$$x^2 + x - 2 = 4$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \boxed{x_1 = 2} \\ x_2 = -3 \text{ nevyhovuje} \end{array} \right.$$

Některé exponenciální rovnice, v nichž nelze určit stejný základ, lze řešit logaritmováním, viz některé další příklady.

Řešte exponenciální rovnice (logaritmováním)

$$5^{t-2} = \frac{10}{3}$$

Řešení:

$$\frac{5^t}{5^2} = \frac{10}{3}$$

$$5^t = \frac{250}{3}$$

$$\log 5^t = \log \frac{250}{3}$$

$$t \cdot \log 5 = \log \frac{250}{3}$$

$$t = \frac{\log \frac{250}{3}}{\log 5}$$

Použijeme kalkulačky

$$\boxed{t \doteq 2{,}748}$$

Zkouška: na kalkulačce

$$5^{(2{,}748\ldots-2)} \doteq 3{,}33$$

$$\frac{10}{3} \doteq 3{,}33$$

$$3^t + 3^{t+1} = 128$$

Řešení:

$$3^t + 3^t \cdot 3 = 128$$

$$4 \cdot 3^t = 128 \quad | : 4$$

$$3^t = 32$$

$$\log 3^t = \log 32$$

$$t \cdot \log 3 = \log 32$$

$$t = \frac{\log 32}{\log 3} \Rightarrow \boxed{t \doteq 3{,}1546\ldots}$$

$$v^{1+\log v} = 100$$

Řešení logaritmováním:

$$\log v^{1+\log v} = \log 100$$

$$\log v^{1+\log v} = 2$$

$$(1+\log v) \cdot \log v = 2 \quad \text{VPRAVO}$$

$$\log v + \log^2 v = 2 \quad \ldots \text{subs. } \log v = t$$

$$t + t^2 = 2$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

Zpět:

$$\log v = -2 \qquad \log v = 1$$

$$\boxed{v = 0{,}01} \qquad \boxed{v = 10}$$

$$2^{t+3} - 2^t = 112 \text{ a řešení:}$$

$$2^t \cdot 2^3 - 2^t = 112$$

$$8 \cdot 2^t - 2^t = 112$$

$$7 \cdot 2^t = 112 \quad | : 7$$

$$2^t = 16$$

$$\log 2^t = \log 16$$

$$t \cdot \log 2 = \log 16$$

$$t = \frac{\log 16}{\log 2}$$

$$\boxed{t = 4}$$

Úlohu jsme mohli tentokrát řešit bez logaritmování

$$2^t = 2^4 \Rightarrow t = 4$$

Další rovnice (náročnější) už jsou opět logaritmické (ať na jedničku)

$$\sqrt[5]{v^{\log_3 v}} = 243$$

Řešení (náročné)

$$v^{\frac{\log_3 v}{5}} = 243$$

$$v^{\frac{1}{5}\log_3 v} = 243$$

Zlogaritmujeme pomocí $\log_3$.

$$\log_3 v^{\frac{1}{5}\log_3 v} = \log_3 243$$

$$\frac{1}{5}\log_3 v \cdot \log_3 v = \log_3 243$$

Pomocí vzorce 5 na str. 2

je $\log_3 243 = \frac{\log_{10} 243}{\log_{10} 3} = 5$

$$\frac{1}{5}(\log_3 v)^2 = 5 \quad | \cdot 5$$

$$(\log_3 v)^2 = 25$$

$$\sqrt{(\log_3 v)^2} = \sqrt{25}$$

$$\log_3 v = \pm 5$$

$\log_3 v_1 = 5$

$v_1 = 3^5$

$\boxed{v_1 = 243}$

$\log_3 v_2 = -5$

$v_2 = 3^{-5}$

$\boxed{v_2 = \frac{1}{243}}$

$$\log_3 x = -\log_3 4 + \log_3 6 - \frac{1}{4}\log_3 0{,}5$$

Řešení (náročné)

$$\log_3 x = \log_3 6 - \log_3 4 - \log_3 0{,}5^{\frac{1}{4}}$$

$$\log_3 x = \log_3 \frac{6}{4} - \log_3 \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

$$\log_3 x = \log_3 \frac{3}{2} - \log_3 \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

$$\log_3 x = \log_3 \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt[4]{\frac{1}{2}}}$$

$$x = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{\sqrt[4]{2}}} = \frac{3\cdot\sqrt[4]{2}}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{3\cdot\sqrt[4]{2}}{2}}$$

$$\frac{1}{3^{-(u+2)}} - 2 = 3^u$$

Řešení:

$$3^{u+2} - 2 = 3^u$$

$$3^u \cdot 3^2 - 2 = 3^u$$

$$9\cdot 3^u - 2 = 3^u$$

$$9\cdot 3^u - 1\cdot 3^u = 2$$

$$8\cdot 3^u = 2 \quad | : 8$$

$$3^u = 0{,}25$$

$$\log 3^u = \log 0{,}25$$

$$u \cdot \log 3 = \log 0{,}25$$

$$u = \frac{\log 0{,}25}{\log 3}$$

$$\boxed{u \doteq -1{,}261\,859\,507}$$

Řešte soustavu rovnic:

a) $\log x + \log y = 5$

$\log x - \log y = 3$

Řešení: sečteme:

$2 . \log x = 8 \quad | : 2$

$\log x = 4$

$\log_{10} x = 4$

$\boxed{x = 10^4}$

$\log x + \log y = 5$

$\log x - \log y = 3 \quad | . (-1)$

$\log x + \log y = 5$

$-\log x + \log y = -3$

$2 . \log y = 2 \quad | : 2$

$\log y = 1$

$\log_{10} y = 1$

$y = 10^1$

$\boxed{y = 10}$

Zkouška:

$L_1 = \log 10^4 + \log 10^1 = 4 + 1 = 5$

$P_1 = 5$

$L_2 = \log 10^4 - \log 10^1 = 4 - 1 = 3$, $P_2 = 3$, $L_2 = P_2$ Řešení: $x = 10^4, y = 10$.