28a) $\boxed{\text{FUNKCE LINEÁRNÍ, KVADRATICKÁ, LINEÁRNÍ LOMENÁ}}$

Definice:

Lineární funkcí se nazývá každá funkce na množině R (tzn. $D_f=R$) vyjádřená ve tvaru

$$\boxed{y=ax+b}\quad ,\ a,b\in R.$$

Zvláštním případem jsou funkce

a) konstantní pro $a=0$, tj. funkce

$$\boxed{y=b} \quad \text{nebo} \quad \boxed{y=0x+b}$$

↓ používáme někdy při řešení úloh

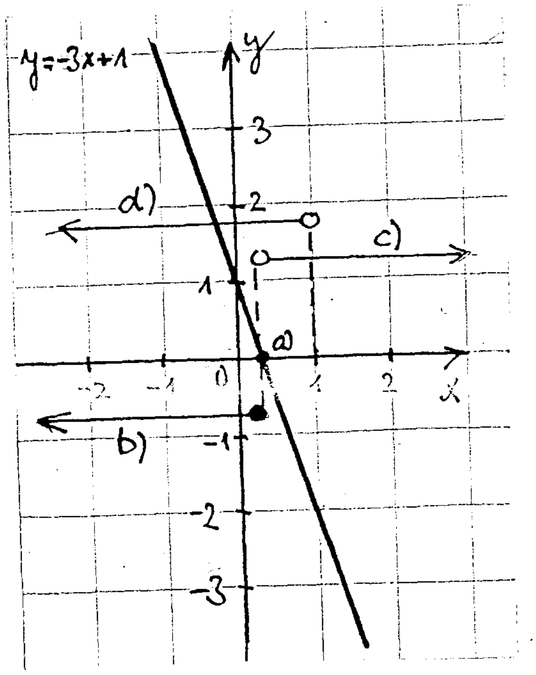
b) přímá úměrnost pro $b=0$, tj. funkce vyjádřená ve tvaru

$$\boxed{y=ax}.$$

Příklad 1: Sestrojte graf funkce $y=-3x+1$ a pak posuďte, pro které hodnoty $x\in R$ platí: a) $-3x+1=0$, b) $-3x+1\geqq 0$, c) $-3x+1<0$, d) $-3x+1>-2$.

Řešení:

x	0	1
y	1	-2



a) $-3x+1=0$

$-3x=-1$

$\boxed{x=\frac{1}{3}}$

b) $-3x+1\geqq 0$

$-3x\geqq -1 \quad |\cdot(-1)$

$3x\leqq 1$

$\boxed{x\leqq\frac{1}{3}}$

$x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right\rangle$

c) $-3x+1<0$

$-3x<-1 \quad |\cdot(-1)$

$3x>1$

$\boxed{x>\frac{1}{3}}$

$x\in\left(\frac{1}{3},\infty\right)$

d) $-3x+1>-2$

$-3x>-3 \quad |:(-3)$

$\boxed{x<1}$

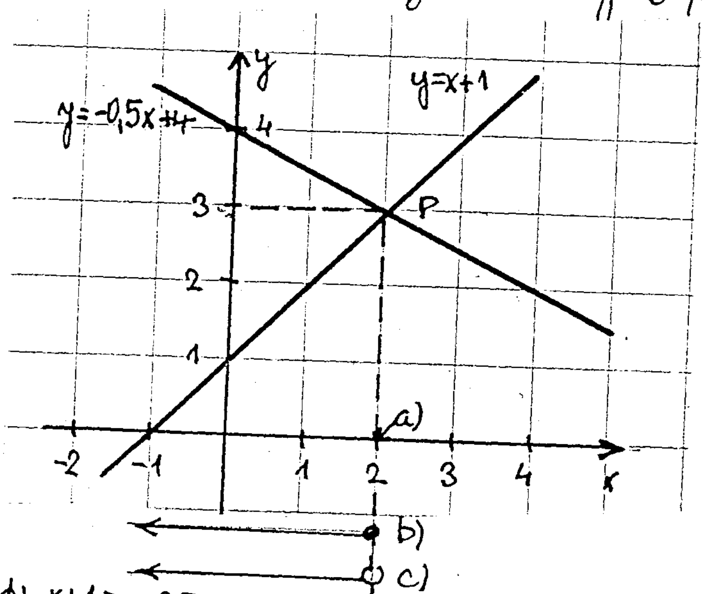
$x\in(-\infty,1)$

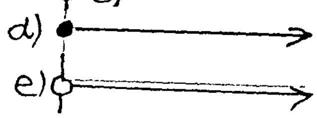
Příklad 2: Sestrojte v téže soustavě Oxy grafy funkcí $y = x+1$, $y = -0{,}5x+4$. Určete všechna $x \in R$, pro která platí:

a) $x+1 = -0{,}5x+4$ b) $x+1 \leqq -0{,}5x+4$ c) $x+1 < -0{,}5x+4$

d) $x+1 \geqq -0{,}5x+4$ e) $x+1 > -0{,}5x+4$

Řešení: Vyčteme ho z grafu a ověříme algebraickým řešením jednoduchých rovnic a nerovnic.





a) $x+1 = -0{,}5x+4$

$1{,}5x = 3$ Průsečík grafů

$\boxed{x = 2}$ P lze určit (DOLE) ⊗

b) $x+1 \leqq -0{,}5x+4$

$1{,}5x \leqq 3$

$\boxed{x \leqq 2}$ $x \in (-\infty; 2\rangle$

c) $x+1 < -0{,}5x+4$

$1{,}5x < 3$

$\boxed{x < 2}$ $x \in (-\infty; 2)$

d) $x+1 \geqq -0{,}5x+4$

$1{,}5x \geqq 3$

$\boxed{x \geqq 2}$ ... $x \in \langle 2; \infty)$

e) $x+1 > -0{,}5x+4$

$1{,}5x > 3$

$\boxed{x > 2}$ ... $x \in (2; \infty)$

⊗ $\left.\begin{array}{l} y = x+1 \\ y = -0{,}5x+4 \end{array}\right\}$ Řešíme jako soustavu rovnic.

$x+1 = -0{,}5x+4 \Rightarrow x = 2,\ y = 3$ ... $P[2;3]$

x	0	2	$y = x+1$
y	1	3	

x	0	2	$y = -0{,}5x+4$
y	4	3	

KE konstrukci grafů

Příklad 3: Sestavte rovnici lineární funkce, jejíž graf prochází body $A[5;2]$, $B[-1; \frac{22}{5}]$.

Řešení:

$y = ax+b$

$2 = 5a+b$

$\boxed{5a+b = 2}$

$y = ax+b$

$\frac{22}{5} = -a+b$

$\boxed{-a+b = \frac{22}{5}}$

Řešíme jako soustavu rovnic.

$5a+b = 2$

$-a+b = \frac{22}{5}$ $|\cdot(-1)$

$5a+b = 2$

$a-b = -\frac{22}{5}$

$6a = -\frac{12}{5}$

$\boxed{a = -\frac{2}{5}}$

$-\frac{2}{5} - b = -\frac{22}{5}$ $|\cdot(-5)$

$2+5b = 22$

$\boxed{b = 4}$

$\boxed{y = -\frac{2}{5}x + 4}$

Příklad 4: Sestrojte graf funkce $m: y = -x + 2{,}5$. Z grafu pak určete všechna $x \in R$, pro které platí:

a) $m(x) = 0$ b) $m(x) > 3$ c) $-3 \leqq m(x) \leqq 2$ d) $-7{,}5 < m(x) < 4{,}5$

alg. řešení (pomocné)

a) $m(x) = 0$, čili $y = 0$

$y = -x + 2{,}5$

$0 = -x + 2{,}5$

$\boxed{x = 2{,}5}$

b) $m(x) > 3$, čili $y > 3$

$-x + 2{,}5 > 3$

$-x > 0{,}5 \quad | \cdot (-1)$

$\boxed{x < -0{,}5}$

$x \in (-\infty; -0{,}5)$

c) $-3 \leqq m(x) \leqq 2$

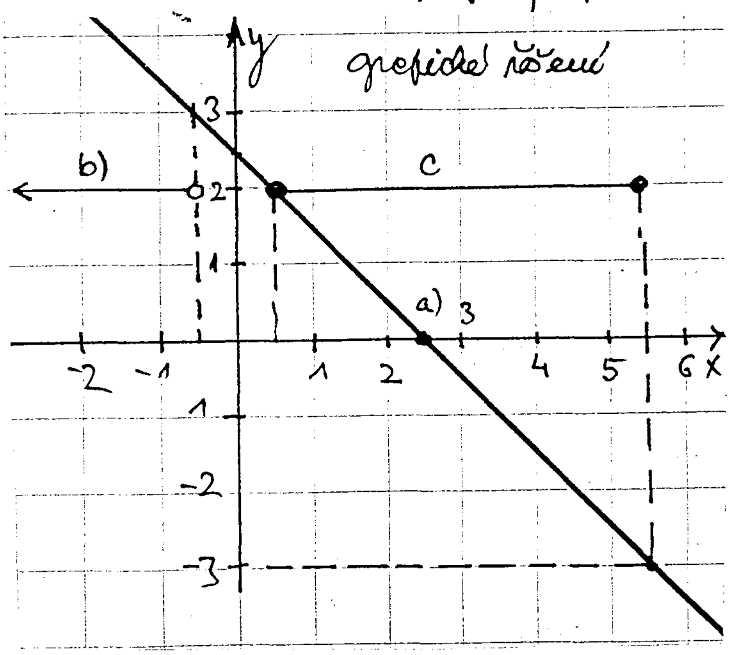
$-3 \leqq -x + 2{,}5 \leqq 2$

$-x + 2{,}5 \geqq -3 \wedge -x + 2{,}5 \leqq 2$

$-x \geqq -5{,}5 \wedge -x \leqq -0{,}5$

$\boxed{x \leqq 5{,}5 \quad \wedge \quad x \geqq 0{,}5}$

$x \in \langle 0{,}5; 5{,}5 \rangle$



d) $-7{,}5 < -x + 2{,}5 < 4{,}5$

$-x + 2{,}5 > -7{,}5 \wedge -x + 2{,}5 < 4{,}5$

$-x > -10 \quad \wedge \quad -x < -2$

$\boxed{x < 10 \quad \wedge \quad x > -2}$

$x \in (-2; 10)$, na grafu nemám místo pro $x=1$

Příklad 5: Určete rovnici lineární funkce h, pro kterou platí: $h(3) = -5$, $h(-1) = 4$.

Řešení: $A[3; -5]$, $B[-1; 4]$

$y = ax + b$ $\quad$ $y = ax + b$

$-5 = 3a + b$ $\quad$ $4 = -a + b$

$\boxed{3a + b = -5}$ $\quad$ $\boxed{-a + b = 4}$

soustava

$3a + b = -5$

$-a + b = 4 \quad | \cdot (-1)$

$3a + b = -5$

$a - b = -4$

$4a = -9$

$\boxed{a = -\frac{9}{4}}$

$\frac{9}{4} + b = 4$

$\boxed{b = \frac{7}{4}}$

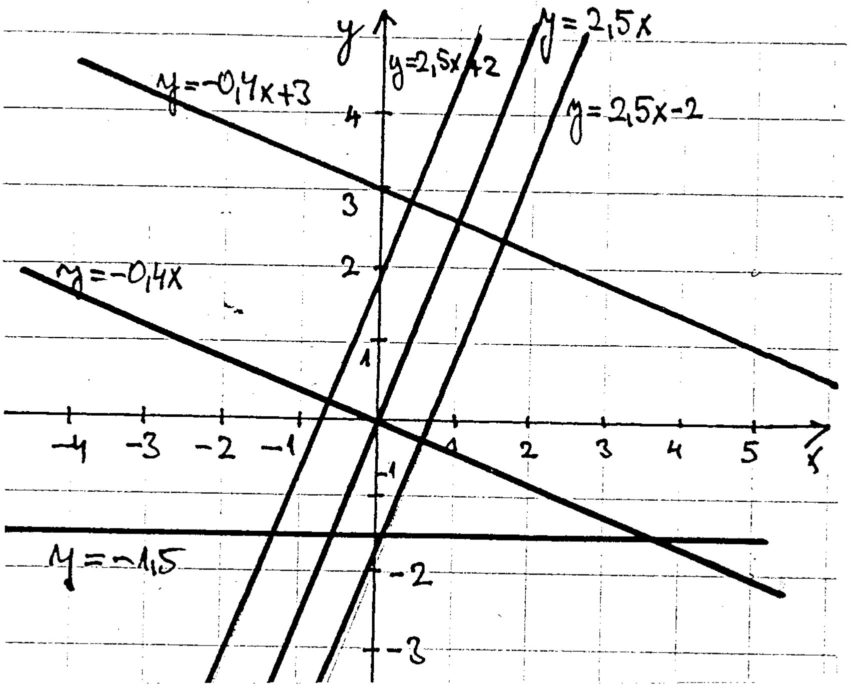
$\boxed{y = -\frac{9}{4}x + \frac{7}{4}}$

Příklad 6: Sestrojte grafy funkcí: $y = -1{,}5$, $y = 2{,}5x$, $y = 2{,}5x + 2$, $y = 2{,}5x - 2$, $y = -0{,}4x$, $y = -0{,}4x + 3$. Odpovězte na otázky:

a) Která z těchto funkcí je rostoucí, která klesající a která není ani rostoucí ani klesající? Která je přímou úměrností?

b) Jaký vliv má hodnota $\underline{a}$ a hodnota $\underline{b}$ v rovnici $y = ax + b$ na graf funkce?

c) Které funkce se nazývají rostoucí, klesající a prosté?



a) Rostoucí:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2{,}5x \\ y = 2{,}5x + 2 \\ y = 2{,}5x - 2 \end{array}\right\} \text{rostoucí}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = -0{,}4x \\ y = -0{,}4x + 3 \end{array}\right\} \text{klesající}$$

$y = -1{,}5$ není ani rostoucí ani klesající

$$\left.\begin{array}{l} y = 2{,}5x \\ y = -0{,}4x \end{array}\right\} \text{přímá úměrnost}$$

b) Hodnota $\underline{a}$ je směrnice přímky (pojem směrnice př. je znám z analyt. geom.)

Pro $a > 0$ je lineární funkce rostoucí.

Pro $a < 0$ " " klesající.

Pro $a = 0$ " " konstantní.

Pro $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ neprochází graf lineární funkce počátkem souřadnic $O[0;0]$.

Graf lin. funkce protíná osu y v bodě $[0;b]$

$$\left.\begin{array}{l} y = 2{,}5x \\ y = 2{,}5x + 2 \\ y = \underbrace{2{,}5x} - 2 \end{array}\right\} \rightarrow$$

grafy těchto funkcí jsou rovnoběžné, neboť mají stejnou směrnici $\underline{a}$.

c) Rostoucí: $\forall x_1, x_2 \in D_f: \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Klesající: $\forall x_1, x_2 \in D_f: \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Prostá: $\forall x_1, x_2 \in D_f: \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

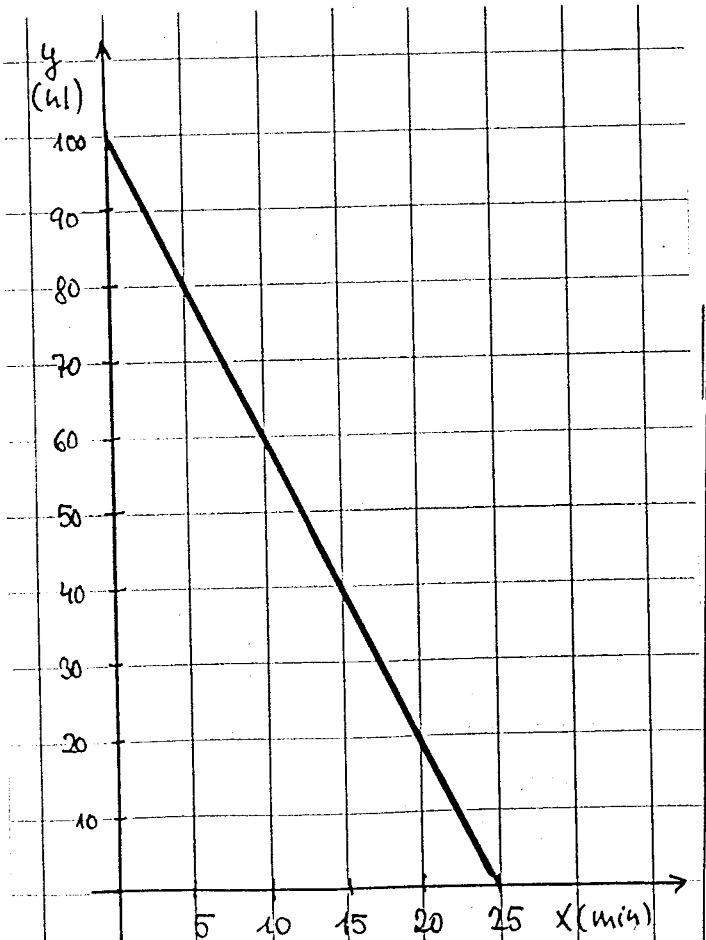
Příklad 7: Z nádrže, ve které je 100 hl mléka, odčerpává čerpadlo každou minutu 4 hl mléka ke sterilizaci.

a) Doplňte tabulku:

Doba odčerpávání	x min	0	8		18	20	
Zbývající objem mléka v nádrži	y hl	100		50			0

Řešení: a) [8; 68], [12,5; 50], [18; 28], [20; 20], [25; 0]

b) Vztah mezi počtem hl mléka v nádrži (y hl) a počtem minut jeho čerpání (x min) vyjádřete rovnicí a grafem.



Řešení b)

$\boxed{y=100-4x}$ nebo

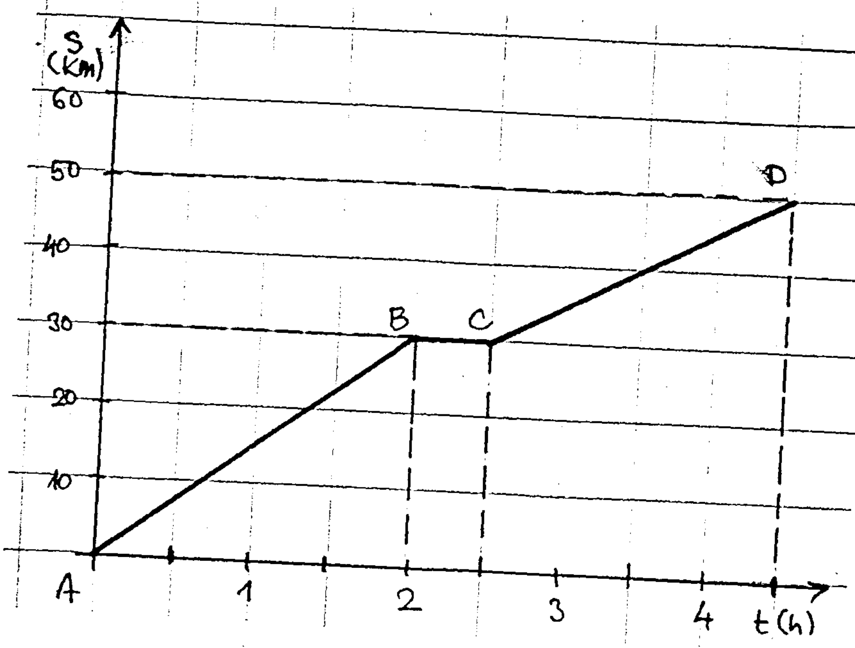
$\boxed{y=-4x+100}$, což je rovnice lineární funkce.

Příklad 8: Cyklista se vydal na silniční trasu z místa A do místa D přes místa B a C. Od okamžiku vyjetí z místa A až do okamžiku jeho příjezdu do místa D uplynulo t hodin. Přitom urazil dráhu dlouhou s km.

a) Určete z grafu t a s z A do D.

b) Části drah z A do B a z B do C vyjádřete rovnicemi funkcí f_1, f_2. Určete též příslušné hodnoty Df_1, Hf_1, Df_2, Hf_2. Vypočítejte prům. rychlosti cyklisty na trati z A do B a z C do D.

c) Kterou část grafu považujeme za graf přímé úměrnosti a konstantní funkce? Co tato funkce v praxi cyklisty představuje?



Řešení:

a) $t = 4{,}5\,h$, $s = 50\,km$ dráha z A do B

$f_1: s = 15t$

$Df_1: t \in \langle 0; 2\rangle$, $Hf_1: s \in \langle 0; 30\rangle$

Cyklista jel rychlostí $15\,km\,h^{-1}$.
Funkce f_1 je přímá úměrnost.

B, C . . . . . . $f_2: s = 30$, $Df_2: t \in \langle 2; 2{,}5\rangle$, $Hf_2: s = 30$.

Cyklista v době 2h až 2,5h nejel, měl přestávku. Jeho dráha v úseku B–C byla stále 30 km od místa A.

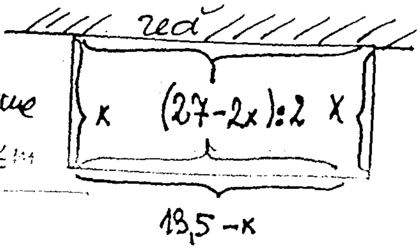
c) Úsečka AB je částí přímky, která je grafem přímé úměrnosti $s = 15t$ (respektive $y = 15x$)

Úsečka BC je částí přímky, která je grafem konstantní funkce $s = 30$ (respektive $y = 30$).

Definice: Kvadratická funkce se nazývá každá funkce na množině R (tzn. $Df = R$) vyjádřená ve tvaru

$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$, kde $a \in R - \{0\}$, $b, c \in R$.

Příklad 8: Pomocí 27 m pletiva chceme oplotit zahrádku tak, aby měla co největší výměru (= obsah) a přitom byla napojena na zeď, kam pletivo nepůjde. Určete rozměry zahrádky, víte-li, že má obdélníkový tvar.



Řešení: Zvolíme jeden rozměr x m

$S_1 = 9 \cdot 4{,}5$

$S_1 = 40{,}5\ (m^2)$

Je tento obsah maximální?

Obecně platí pro $S_2 = (13{,}5 - x) \cdot x$.