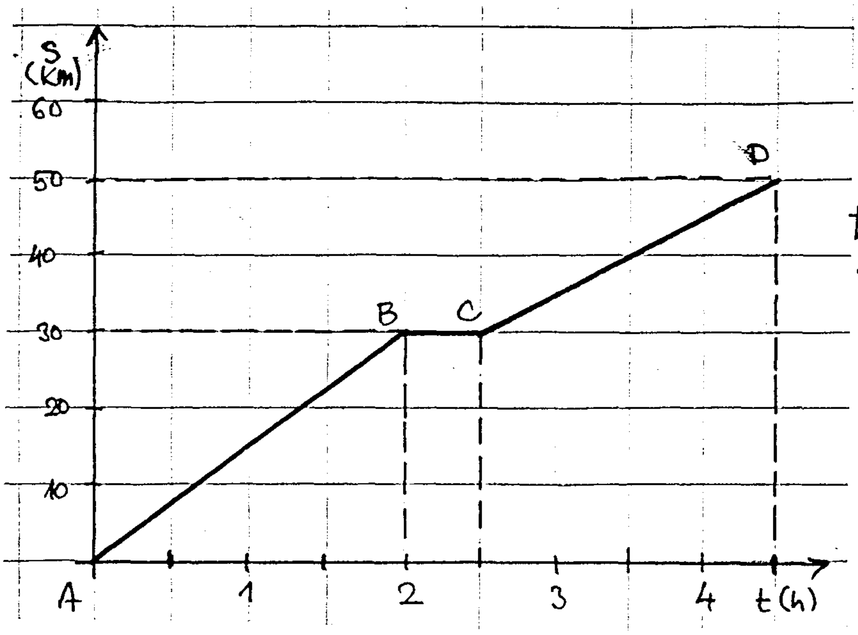


Řešení:

a) $t = 4{,}5\,h$, $s = 50\,km$

dráha z A do B

$f_1: s = 15t$

$Df_1: t \in \langle 0;2\rangle$, $Hf_1: s \in \langle 0;30\rangle$

Cyklista jel rychlostí $15\,km\,h^{-1}$.

Funkce f_1 je přímá úměrnost.

B, C .... $f_2: s = 30$, $Df_2: t \in \langle 2;2{,}5\rangle$, $Hf_2: s = 30$.

Cyklista v době 2h až 2,5h nejel, měl přestávku. Jeho dráha v úseku B–C byla stále 30km od místa A.

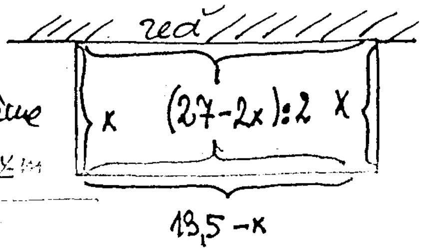
c) Úsečka AB je částí přímky, která je grafem přímé úměrnosti $s = 15t$ (respektive $y = 15x$)

Úsečka BC je částí přímky, která je grafem konstantní funkce $s = 30$ (respektive $y = 30$).

Definice: Kvadratická funkce se nazývá každá funkce na množině R (tzn. $D_f = R$) vyjádřená ve tvaru

$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$, kde $a \in R - \{0\}$, $b, c \in R$.

Příklad 8:



Pomocí 27m pletiva chceme oplotit zahrádku tak, aby měla co největší výměru (= obsah) a přitom byla neoplocena na zeď, kam pletivo nepřijde. Urči rozměry zahrádky, víte-li, že má obdélníkový tvar.

Řešení: označme jeden rozměr x m

$S_1 = 9 \cdot 4{,}5$

$S_1 = 40{,}5\ (m^2)$

Je tento obsah maximální?

Obecně platí pro $S_2 = (13{,}5 - x) \cdot x$

$S_2 = -x^2 + 13{,}5x$

$y = -x^2 + 13{,}5x$, což je kvadratická rovnice bez absolutního členu

Klademe si otázku, kdy $-x^2+13{,}5x$ je maximální.

Úlohu lze vyřešit

a) pomocí derivace

$S_2' = -2x + 13{,}5$

$S_2' = 0$ (jde o extrém)

$-2x + 13{,}5 = 0$

$2x = 13{,}5$

$\boxed{x = 6{,}75\,(m)}$

b) jinak: $-x^2 + 13{,}5x$

$-x^2 + \frac{27}{2}x$

$-\left(x^2 - \frac{27}{2}x\right) = -\underbrace{\left(x - \frac{27}{4}\right)^2}_{} - \left(\frac{27}{4}\right)^2$

Extrém nastane, když $x - \frac{27}{4} = 0$

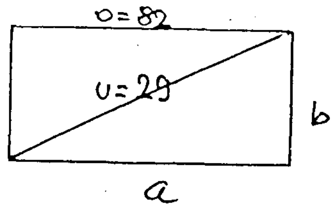
$x = \frac{27}{4}$ ... $x = 6{,}75\,(m)$

Zahrada musí mít tvar čtverce se stranou $x = 6{,}75$ m.

$S_2 = 6{,}75^2 = 45{,}5625\,(m^2)$.

Příklad 9: Obvod obdélníkového chodníku je 82 m, jeho úhlopříčka má délku 29 m. Vypočítejte jeho délku a šířku.

Řešení:



$o = 82$

$a + b = 41$

$a = 41 - b$

$a^2 + b^2 = u^2$

$(41-b)^2 + b^2 = 29^2$

$1681 - 82b + b^2 + b^2 = 841$

$2b^2 - 82b + 840 = 0 \quad |:2$

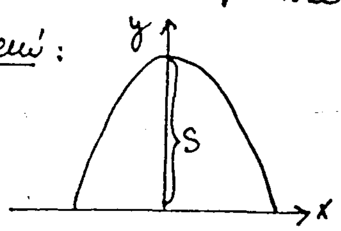
$\underbrace{b^2 - 41b + 420}_{} = 0$

Levou část rovnice tvoří kvadr. funkce.

Budeme-li řešit vzniklou kvadratickou rovnici, získáme rozměry 21 m a 20 m.

Příklad 10: Těleso je vrženo svisle vzhůru s počáteční rychlostí $v = 50\,m.s^{-1}$. Jakou nejvyšší výšku dosáhne? Užijte vzorec $s = vt - \frac{g}{2}t^2$.

Řešení:



$s = 50t - \frac{10}{2}t^2$

$s = -5t^2 + 50t$

Řešení pomocí derivace:

$s' = -10t + 50$

$-10t + 50 = 0$

$\boxed{t = 5\,(\text{sekund})}$

Jiné řešení: $-5t^2+50t$

$$-5(t^2-10t) = -5(\underbrace{t^2-10t+25}_{(t-5)^2}-25)$$

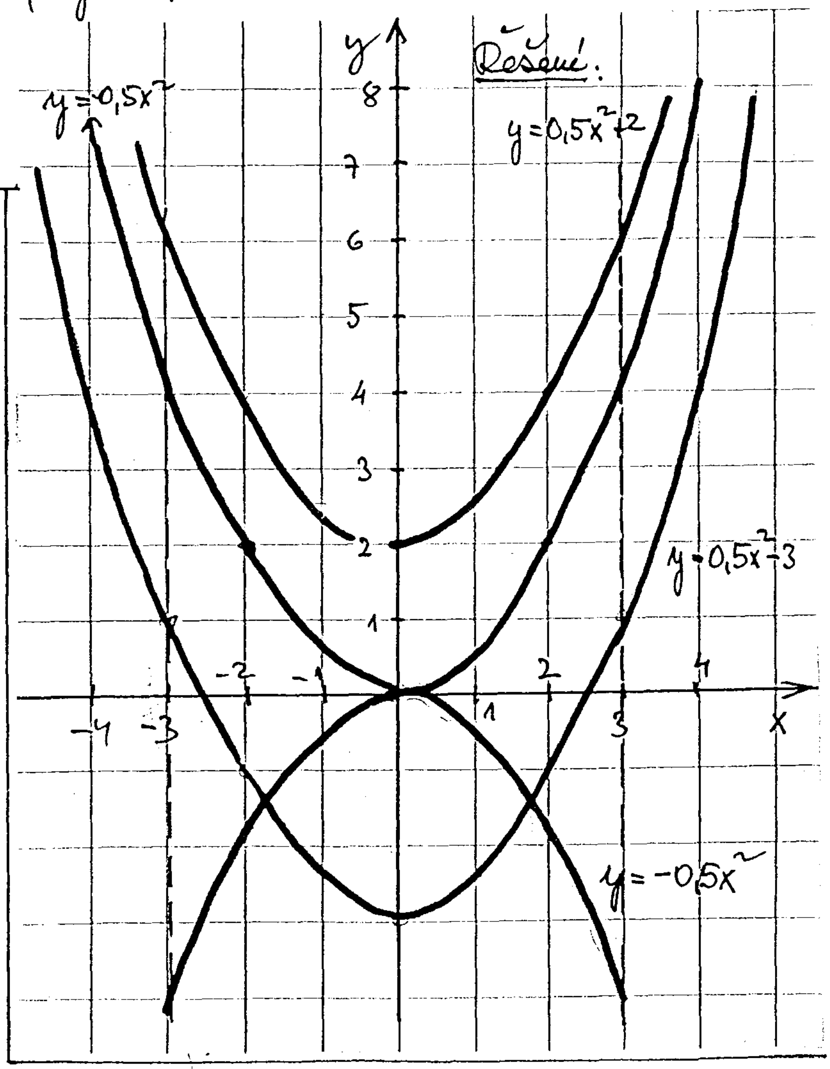
Extrém nastane pro $t-5=0$

$t=5$

$S = 50\cdot 5 - \frac{10}{2}\cdot 5^2 = 250 - 5^3 = 250 - 125 =$ $\boxed{125\ (m)\text{ je max. výška}}$

Příklad 11: a) Sestrojte graf kv. funkce: a) $y=0{,}5x^2$, b) $y=0{,}5x^2+2$, $y=0{,}5x^2-3$, $y=-0{,}5x^2$.

b) Určete obor grafů, je-li $D_f: x\in\langle -3;3\rangle$



Příklad 12:

Sestrojte grafy funkcí:

a) $y=\frac{3}{4}x^2$

b) $y=\frac{3}{4}(x+1)^2$

c) $y=\frac{3}{4}(x-2)^2$

d) $y=\frac{3}{4}(x-2)^2-3$

Řešení: viz str. 9

b) $y=\frac{3}{4}(x+1)^2$

↓

graf z a) posuneme o (-1) ve smyslu osy x.

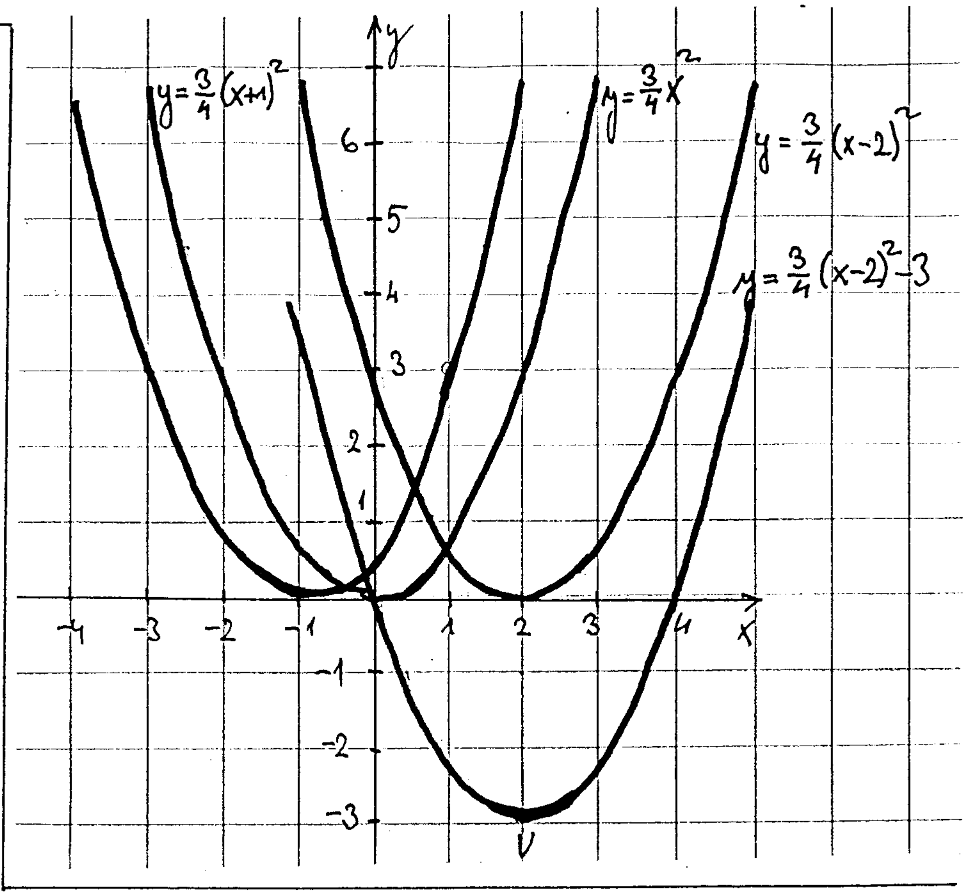
c) $y=\frac{3}{4}(x-2)^2$ → ... graf z a) posuneme o $(+2)$ ve smyslu osy x.

d) $y=\frac{3}{4}(x-2)^2-2$ graf z c) posuneme o (-3) ve smyslu osy y.

---

x	-3	$-2{,}5$	-2	-1	0	1	2	$2{,}5$	3
$y=\frac{3}{4}x^2$	$6\frac{3}{4}$	$\doteq 4{,}7$	3	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	3	$\doteq 4{,}7$	$6\frac{3}{4}$

Tabulka hodnot x, y pro $D_f: x \in \langle -3; 3 \rangle$



Příklad 13:

Jak byste sestrojili graf funkce $y = 2x^2 - 12x + 18$

Řešení:

Provedeme úpravu:

$y = 2(x^2 - 6x + 9)$

$y = 2(x-3)^2$

Sestrojíme graf funkce $y = 2x^2$ a ten posuneme o $+3$ ve smyslu osy x. Konstrukci neprovádíme.

Příklad 14: Sestrojte graf funkce

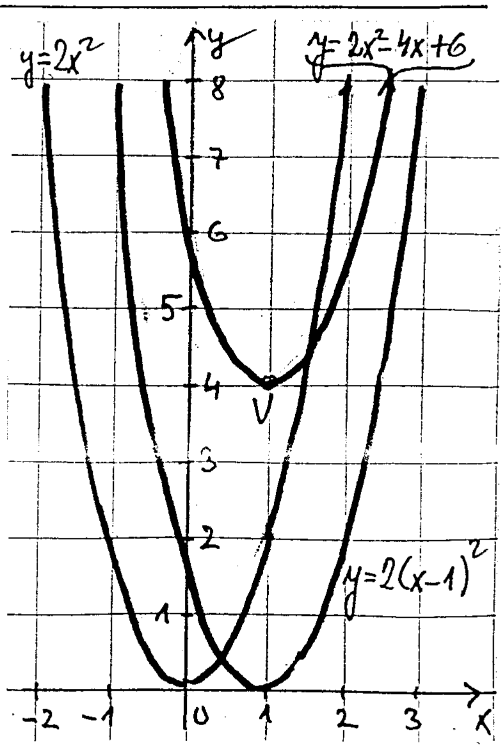
$y = 2x^2 - 4x + 6$

Řešení: Provedeme úpravu:

$y = \underbrace{2x^2 - 4x + 2} + 4$

$y = 2(x^2 - 2x + 1) + 4$

$y = 2(x-1)^2 + 4$; postup byl už popsán.



Krátké zobecnění je na další stránce.

Grafem funkce $y=ax^2+bx+c$ je parabola, která vznikne z grafu funkce $y=ax^2$ posunutím o $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ ve směru osy $\underline{x}$ a o $\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ ve směru osy $\underline{y}$.
Souřadnice vrcholu V:
$$V\left[-\frac{b}{2a}; c-\frac{b^2}{4a}\right]$$

Příklad 15: Ověřme správnost uvedeného poznatku na grafech kvadratických funkcí z předchozích příkladů:

$\boxed{\text{Př. 14}}$: $y = \underbrace{2}_{a}x^2 \underbrace{-4}_{b}x + \underbrace{6}_{c}$

Posunutí: $-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot 2} = 1$ ve směru osy $\underline{x}$

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{(-4)^2-4.2.6}{4.2} = -\frac{16-48}{8} = 4 \text{ ve směru osy } \underline{y}.$$

Vrchol $V\left[-\frac{b}{2a}; c-\frac{b^2}{4a}\right] \ldots \left[-\frac{-4}{2\cdot 2}; 6-\frac{(-4)^2}{4\cdot 2}\right] \ldots [1;4]$

$\boxed{\text{Př. 13}}$ $y = \underbrace{2}_{a}x^2 \underbrace{-12}_{b}x + \underbrace{18}_{c}$

Posunutí ve směru osy x: $\left(-\frac{-12}{4}\right) = 3$; osy y: $-\frac{144-4.2.18}{4.2} = 0$
Vrchol neověřuji, byl byl $[3;0]$.

$\boxed{\text{Př. 12}}$

$y = \frac{3}{4}(x-2)^2-3$

$y = \frac{3}{4}(x^2-4x+4)-3$

$y = \frac{3}{4}x^2-3x+3-3$

$y = \underbrace{\frac{3}{4}}_{a}x^2 \underbrace{-3}_{b}x \underbrace{+0}_{c}$

Ve směru osy x: $-\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\cdot\frac{3}{4}} = \frac{\frac{3}{1}}{\frac{3}{2}} = \frac{6}{3} = 2$

Ve směru osy y:
$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{9-4\cdot\frac{3}{4}\cdot 0}{4\cdot\frac{3}{4}} = -\frac{9}{3} = -3$$

$$V\left[-\frac{-3}{2\cdot\frac{3}{4}}; 0-\frac{9}{4\cdot\frac{3}{4}}\right] \ldots V[2;-3]$$

Rovnici paraboly můžeme určit, známe-li 3 body jejího grafu, respektive souřadnice tří jejích bodů.

Příklad 16: Napište rovnici paraboly, jejíž graf prochází body A[-1;-1], B[0;-4], C[1;3]

Řešení:

A: $y=ax^2+bx+c$ B: $y=ax^2+bx+c$ C: $y=ax^2+bx+c$

$-1=a.(-1)^2+b.(-1)+c$ $-4=c$ $3=a+b+c$

$-1=a-b+c$ $\boxed{c=-4}$ $\boxed{a+b+c=3}$

$\boxed{a-b+c=1}$ — řešíme jako soustavu rovnic

$$\left.\begin{aligned} a-b+c&=-1\\ c&=-4\\ a+b+c&=3\end{aligned}\right\}\text{soustava}$$

$a-b-4=-1 \Rightarrow a-b=3$

$a+b-4=3 \Rightarrow a+b=7$

$2a=10$

$\boxed{a=5}$

$5+b=7$

$\boxed{b=2}$

$$\boxed{y=5x^2+2x-4}$$

Příklad 17: Napište rovnici funkce, která vyjadřuje závislost obsahu kruhu na jeho poloměru.

Řešení: $\boxed{S=\pi r^2}$ respektive $y=\pi x^2$, $r\in(0,+\infty)$, $x\in(0;\infty)$

Příklad 18: Vypočítejte hodnoty kvadrat. funkce v bodech -2; -3, je-li $y=-1{,}5x^2+6x-1$.

Řešení: Pro $x=-2$:

$f(-2)$: $y=-1{,}5(-2)^2+6.(-2)-1$

$\boxed{y=-19}$

$[-2;-19]$

Pro $x=-3$

$f(-3)$: $y=-1{,}5.(-3)^2+6.(-3)-1$

$\boxed{y=-32{,}5}$

$[-2;-32{,}5]$

Příklad 19: Je dána funkce g: $y=x^2-2x+3$. Určete všechna $x\in D_g$, pro něž platí a) $g(x)=g(0)$, b) $g(x)=g(-1)$.

Řešení a)

$g(0)$: $y=0^2-2.0+3$

$y=3$

$g(x)$: $y=x^2-2x+3$ } $y=y$

$x^2-2x+3=3$

$x^2-2x=0$

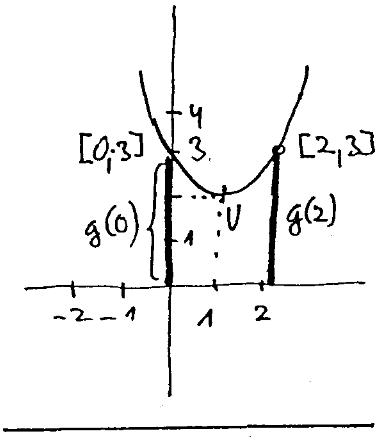
$x(x-2)=0$ < $\boxed{x=0}$, $\boxed{x=2}$

Pro $x=0$ vyšlo $y=3$

Pro $x=2$... $y=4-2.2+3=3$

$[0;3]$, $[2;3]$

Nakolik jsem lézi zobrazil, určil jsem V atd. (není třeba dělat)



Řešení b)

$g(x): y = x^2-2x+3$

$g(-1): y = (-1)^2-2.(-1)+3$

$y = 6$

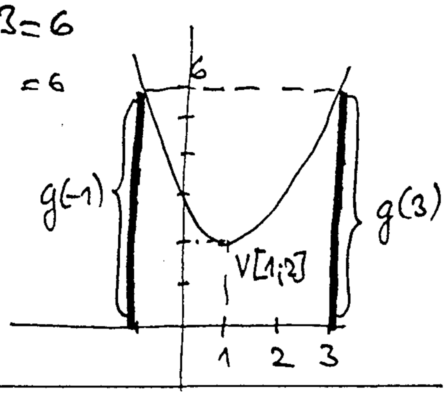
$y = y$

$x^2-2x+3 = 6$

$x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{2\pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

pro $x_1=3$ je $y = 3^2-2.3+3=6$

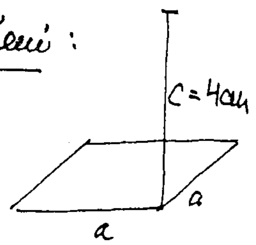
pro $x_2=-1$ je $y = 1+2+3 = 6$



$V[-\frac{-2}{2}, 3-\frac{4}{4}] .. V[1;2]$

Příklad 20: Krabice má čtvercovou podstavu s hranou délky a a s výškou 4 cm. Zapište funkci, která vyjadřuje
a) závislost objemu krabice na délce hrany podstavy,
b) " povrchu krabice " " " " .

Řešení:



a) $V = a^2 \cdot 4$

$\boxed{V = 4a^2}$ $a \in (0,\infty)$ nebo

$f: y = 4x^2$, $Df: x \in (0;\infty)$

$S = 2(ab+ac+bc)$

$S = 2(aa+a.4+a.4)$

$S = 2(a^2+8a)$

$\boxed{S = 2a^2+16a}$ $Df: a \in (0;\infty)$

$y = 2x^2+16x$

Definice: Lineární lomená funkce se nazývá každá funkce na množině $R-\{-\frac{d}{c}\}$ vyjádřená ve tvaru

$$\boxed{y = \frac{ax+b}{cx+d}},$$

kde $a,b,c,d \in R \wedge c \neq 0$ a $ad-bc \neq 0$.

Nepřímá úměrnost se nazývá každá funkce na množině $R-\{0\}$ vyjádřená ve tvaru

$y = \frac{k}{x}$, kde $k \in R-\{0\}$