23a) KOMPLEXNÍ ČÍSLA A POČETNÍ OPERACE S NIMI

Komplexní čísla – C

V množině všech reálných čísel neexistuje takové číslo, jehož druhá mocnina je záporné číslo. Vytvoříme proto novou číselnou množinu, která bude obsahovat takový prvek i, pro který platí:

$$i=\sqrt{-1}\quad , \quad i^2=-1$$

S prvkem i musí též existovat i prvky $i^2, i^3, i^4 \dots$ Platí:

$i=\sqrt{-1}$

$i^2=i\cdot i=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2=-1$

$i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i$ atd.

$i=\sqrt{-1}$	$i^2=-1$	$i^3=-i$	$i^4=1$	$i^5=i$	$i^6=-1$	$i^7=-1$	$i^8=1$

Množinu komplexních čísel C získáme z množiny všech reálných čísel R tak, že k ní přidáme takové číslo i, pro které platí $i=\sqrt{-1}$ (nebo $i^2=-1$).

Komplexní čísla zapisujeme ve tvaru uspořádaných dvojic $a+bi$, kde a, b jsou reálná čísla, $i=\sqrt{-1}$. Například:

$2+3i \qquad -4+2i \qquad -\frac{1}{2}-\frac{3}{4}i$

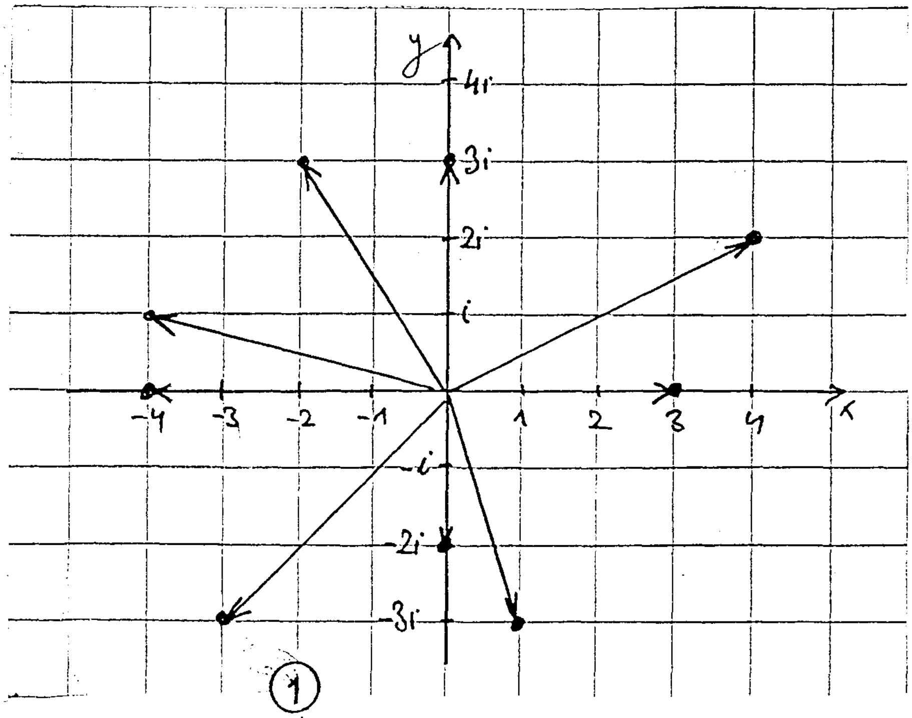
reálná, imaginární složka

Příklad 1: Zobrazte komplexní čísla: $(-2+3i)$, $3i$, $(4+2i)$, 3, $(1-3i)$, $(-3,-3i)$, -4, $(-4,i)$, $-2i$

↓

$(-4+0i)$

Řešení je na obrázku



Kompl. číslo znázorňujeme v Gaussově rovině vektorem, tj. orientovanou úsečkou. Vektor znázorňující k. číslo umisťujeme tak, aby měl svůj počátek v počátku souřadnic O[0,0]. Za obraz komplex. čísla můžeme někdy pokládat jen koncový bod vektoru (•). Číslo i se nazývá imaginární jednotka. Čísla 3i, -2i ... se nazývají ryze imaginární čísla.

Rovnost komplexních čísel

Dvě komplexní čísla jsou si rovna, jestliže se rovnají jejich reálné části a imaginární části (složky).

Příklad 2: Pro která čísla $x, y \in R$ platí:

$$(1-i)x - (-2+i)y = 5-2i$$

Řešení:

$$x - xi - (-2y + yi) = 5-2i$$

$$x - xi + 2y - yi = 5-2i$$

$$(x+2y) + (-xi - yi) = 5-2i$$

$$(x+2y) + (-x-y) \cdot i = 5-2i$$

$$x + 2y = 5$$

$$-x - y = -2$$

$$\boxed{y = 3}$$

$$x + 2 \cdot 3 = 5$$

$$x + 6 = 5$$

$$\boxed{x = -1}$$

Zkouška: $L = (1-i) \cdot (-1) - (-2+i) \cdot 3 = -1 + i - (-6+3i) =$

$= -1 + i + 6 - 3i = 5-2i$

$P = 5-2i$

Příklad 3: Najděte reálná čísla x, y, která jsou řešením rovnice:

$$(1+i)x + (1-i)y = 3-i$$

$$x + xi + y - yi = 3-i$$

$$(x+y) + (x-y)i = 3-1i$$

$$x + y = 3$$

$$x - y = -1$$

$$2x = 2$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$1 + y = 3$$

$$\boxed{y = 2}$$

Sčítání a odčítání kompl. čísel

Příklad 4: Sečtěte kompl. čísla x, y, pro která platí:

a) $x = -3+2i$, $y = 1-5i$

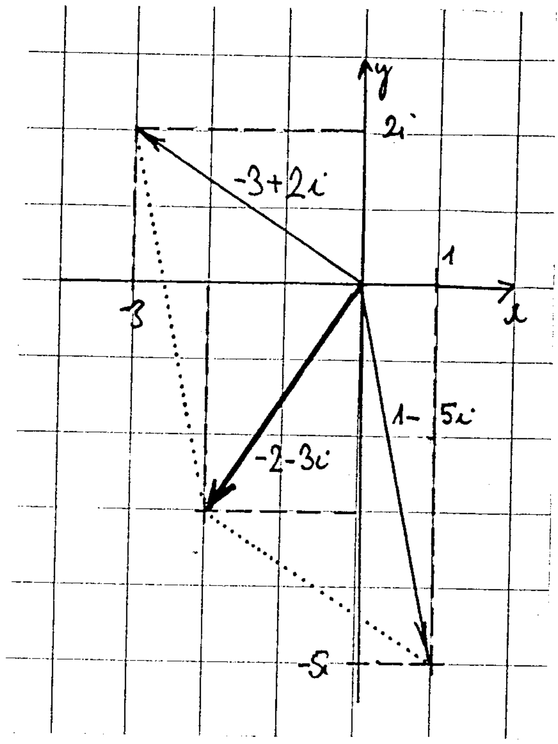
b) $x = a+bi$, $y = c+di$ ..., což je obecné vyjádření součtu

Řešení: Sečteme zvlášť složky reálné a zvlášť imaginární.

a) $x+y = (-3+2i)+(1-5i) = -3+2i+1-5i = (-3+1)+(+2i-5i) =$

$= \boxed{-2-3i}$

Algebraický součet můžeme též interpretovat graficky: Součet dvou komplexních čísel je dán součtem vektorů, které jsou obrazy daných komplexních čísel (sčítanců).



b) $x+y = \dots$ obecně platí:

$$\boxed{(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i}$$

Definice: Číslo $z' = -a-bi$ je nazývá opačné číslo k číslu $z = a+bi$

Příklad 5: Odečtěte komplexní číslo y od komplexního čísla x, je-li

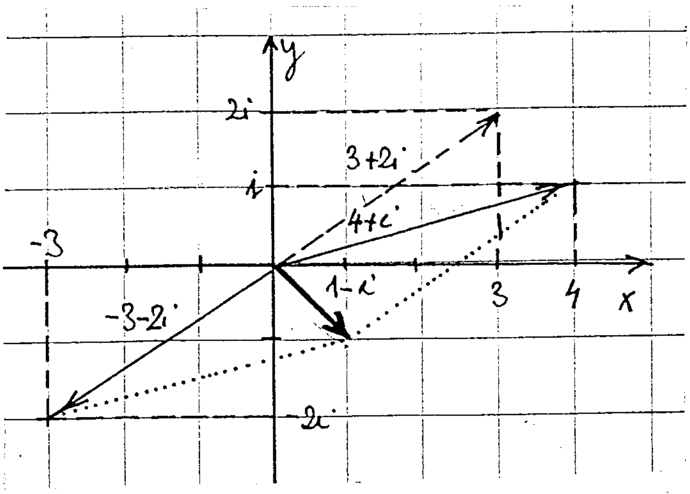
a) $x = 4+i$, $y = 3+2i$ b) $x = a+bi$, $y = c+di$

Řešení:

a) $x-y = (4+i)-(3+2i) =$

$= 4+i-3-2i = \boxed{1-i}$

Protože $x-y = x+(-y)$, je možné provést rozdíl tak, že k danému číslu přičteme číslo opačné, a to algebraicky i graficky.



b) Obecně: $x-y =$

$$\boxed{(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i}$$

Příklad 6: Vypočítejte:

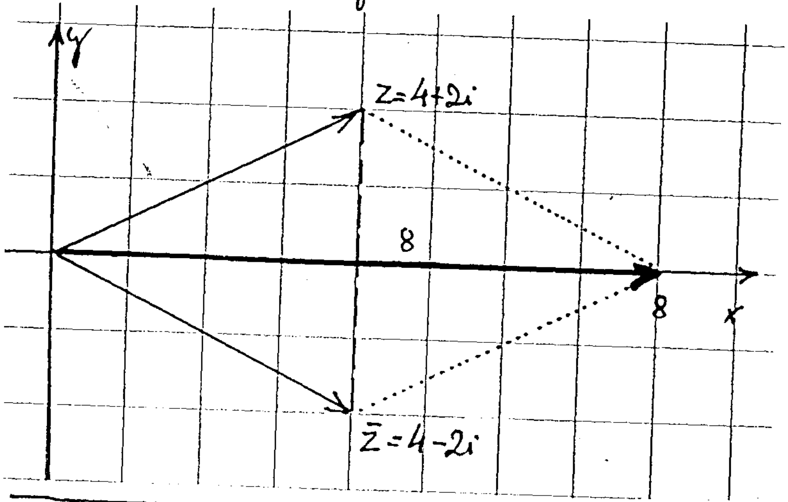
a) $(-5+2i)-(3-5i) = -8+7i$ b) $(3+2i)-(-3+2i) = 6+0i = 6$

c) $(3-4i)-(3+4i)+(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}i) = -8i+(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}i) = \frac{1}{2}-\frac{35}{4}i = \frac{1}{2}-8{,}75i$

Definice: Komplexní číslo sdružené s číslem $a+bi$ je číslo $a-bi$.

Číslo sdružené s komplex. číslem z označujeme zpravidla $\bar{z}$ (z s pruhem). Píšeme někdy též $\overline{-2+3i} = -2-3i$.

Příklad 7: Je dáno číslo $z = 4+2i$. Vypočítejte a graficky vyznačte $z+\bar{z}$.



$z+\bar{z} = (4+2i)+(4-2i) = 8$

Obrazy komplex. čísel sdružených jsou souměrné podle osy x. Jejich součet je reálné číslo.

Příklad 8: Je dáno komplexní číslo $(5-3i)$. Určete alespoň jedno komplex. číslo z takové, aby jejich součet byl

a) reálné číslo b) ryze imaginární číslo.

Řešení: nejdříve obecnou úvahu pro k. čísla z_1, z_2.

a) má-li být součtem z_1+z_2 reálné číslo, musí se v součtu jejich imag. složky vynulovat:

$(a+bi)+(c+di) = (a+c) + \underbrace{(b+d)}_{=0}i$ $b+d=0$

$b=-d$

$(5-3i)+(-4+3i) = 1$

↓ opačné

lze zvolit libovolně, např. (-4) ... Výsledek $(-4+3i)$, $(20+3i)$, $(\sqrt{2}+3i)$...

b) Má-li být součtem z_1+z_2 ryze imaginární číslo, musí se v součtu jejich reálné složky vynulovat:

$(a+bi)+(c+di) = \underbrace{(a+c)}_{=0} + (b+d)i$ $a+c=0$

$a=-c$

$(5-3i)+(-5+6i) = 3i$

↓

opačné lze zvolit libovolně ... Výsledek $(-5+6i)$, $(-5+20i)$...

Definice: Absolutní hodnota komplexního čísla z je $\sqrt{z \cdot \bar{z}}$, tj. $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ $\boxed{\text{I.}}$

Pro $z \neq 0$ je $|z| > 0$, pro $z = 0$ je $|z| = 0$,

pro $z = a + bi$ je $\underline{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}$ $\boxed{\text{II.}}$

Definice: Komplexní jednotka je komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna 1.

Příklad 9: Přesvědčte se, že daná komplexní čísla jsou komplexní jednotky (při řešení užijte i znalosti z dalšího učiva):

a) $\dfrac{1+2i}{2-i}$ 1. způsob: $\left|\dfrac{1+2i}{2-i}\right| = \dfrac{|1+2i|}{|2-i|} = \dfrac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{2^2+1^2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$

2. způsob: $\left|\dfrac{1+2i}{2-i}\right| = \left|\dfrac{(1+2i)\cdot(2+i)}{(2-i)\cdot(2+i)}\right| = \left|\dfrac{2+4i+i+2i^2}{4+1}\right| = \left|\dfrac{2+5i-2}{5}\right| = \left|\dfrac{5i}{5}\right| = |i| = 1$

---

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

1. způsob: pomocí $\boxed{\text{I.}}$ $\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)} =$

$= \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{2}{4} + \dfrac{2}{4}} = \sqrt{\dfrac{4}{4}} = 1$

2. způsob: pomocí $\boxed{\text{II.}}$ $\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{2}{4} + \dfrac{2}{4}} = 1$

---

c) $\dfrac{1}{i}$ … $\left|\dfrac{1}{i}\right| = \left|\dfrac{1\cdot i}{i \cdot i}\right| = \left|\dfrac{i}{i^2}\right| = \left|\dfrac{i}{-1}\right| = |-i| = 1$

---

d) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \dfrac{|1+i\sqrt{3}|}{|1-i\sqrt{3}|} = \dfrac{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}} = \dfrac{\sqrt{1+3}}{\sqrt{1+3}} = \dfrac{2}{2} = 1$

Násobení komplexního čísla

a) číslem $i, -i, -1, 1$,

b) reálným číslem $c \neq \pm 1$,

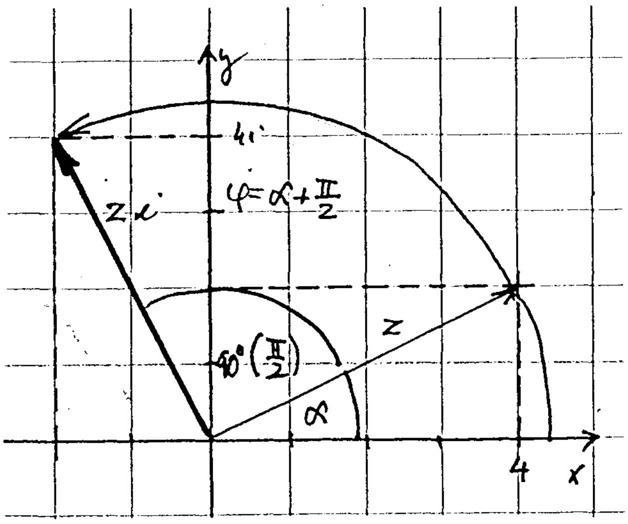
c) číslem ryze imaginárním,

d) komplexní jednotkou,

e) libovolným kompl. číslem.

Násobení číslem i a $-i$.

Příklad 10: Komplexní číslo $z = 4+2i$ vynásobte číslem i a proveďte grafickou interpretaci tohoto násobení.



$z \cdot i = (4+2i)\cdot i = 4i + 2i^2 = 4i - 2 =$

$= \boxed{-2+4i}$

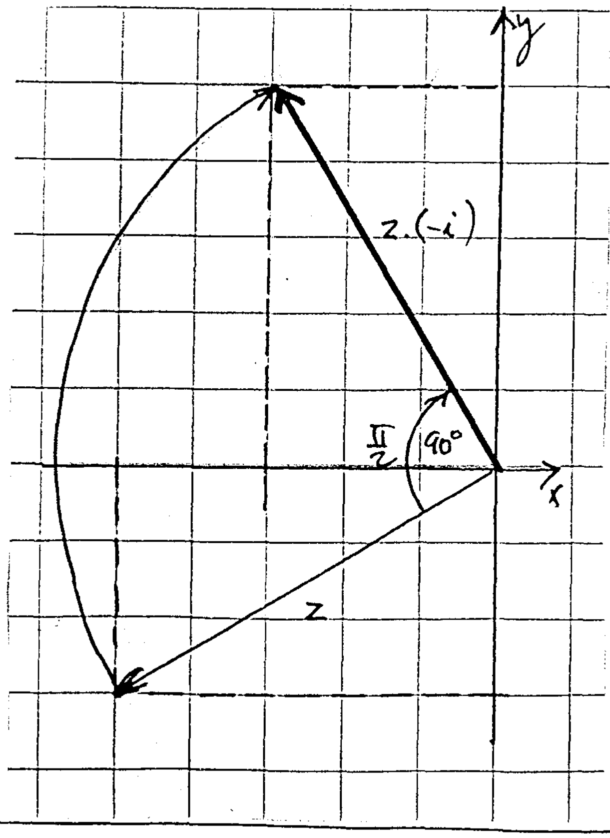
Obraz komplexního čísla z se otočil o $90°\left(\frac{\pi}{2}\right)$ v kladném smyslu.

Příklad 11: Kompl. číslo $z = -5-3i$ vynásobte číslem $-i$. Co zjistíte?

$z \cdot (-i) = (-5-3i)\cdot(-i) =$

$= +5i + 3 = \boxed{-3+5i}$

Obraz komplexního čísla z se otočil o $-90°$ $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ v záporném smyslu.



Násobení číslem

I.) 1 ... číslo se nezmění

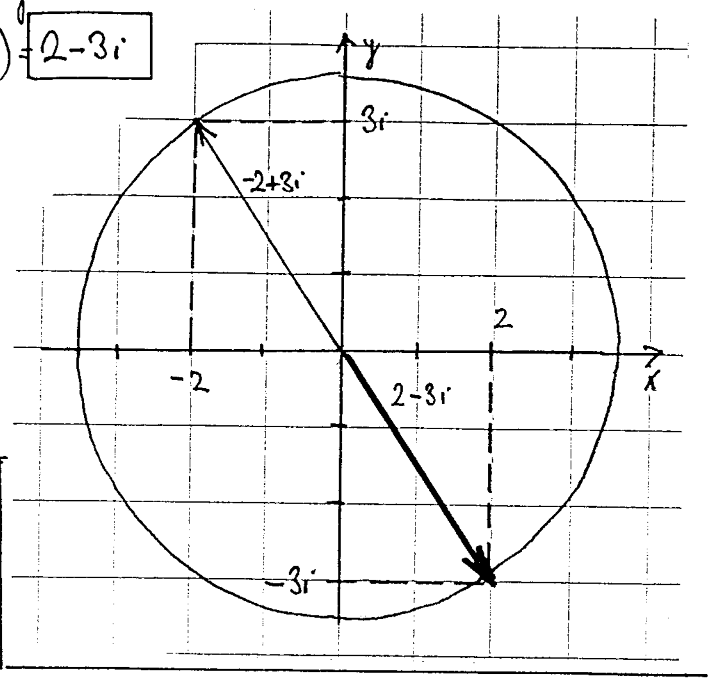
II.) (-1)

Příklad 12: Číslo $z = (-2+3i)$ vynásobte číslem (-1)

$$z\cdot(-1) = (-2+3i)\cdot(-1) = \boxed{2-3i}$$

Obraz kompl. čísla $\underline{z}$ se otočil o $-180°\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, nebo $180°\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Součinem $z\cdot(-1)$ je číslo opačné k číslu $\underline{z}$.

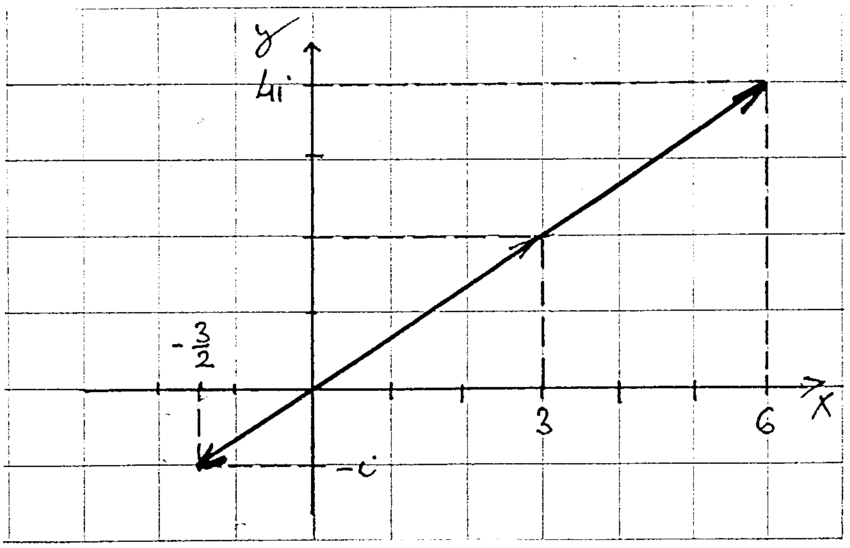


b) Násobení číslem reálným $c \neq \pm 1$

Příklad 13: K. číslo $z = 3+2i$ vynásobte 1) číslem $c_1 = 2$, 2) číslem $c_2 = -\frac{1}{2}$.

$$z\cdot c_1 = (3+2i)\cdot 2 = \boxed{6+4i}$$

$$z\cdot c_2 = (3+2i)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{\left(-\frac{3}{2}-i\right)}$$



Násobení komplexního čísla reálným číslem se jeví jako posunutí obrazu kompl. čísla v kladném nebo záporném smyslu.

c) Násobení číslem ryze imaginárním $(\underline{d})$.

Úloha pro $z = 2+3i$, $d = 2i$: Kompl. číslo nejdříve otočíme o úhel $\alpha = 90°\left(\frac{\pi}{2}\right)$ a pak ho posuneme (nebo nejdříve posuneme a pak otočíme).

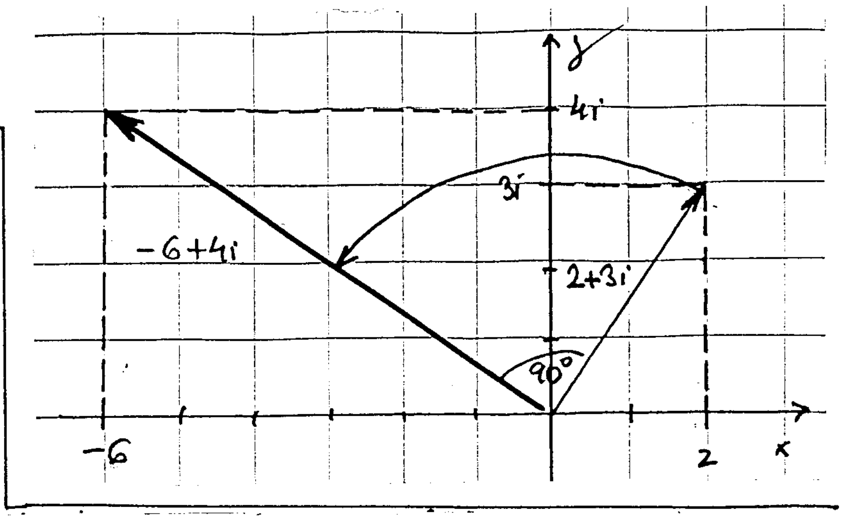
Algebraické řešení: $z\cdot d = (2+3i)\cdot 2i = 4i + 6i^2 = 4i + 6(-1) = 4i - 6 =$

$$= \boxed{-6+4i}$$

grafická interpretace:

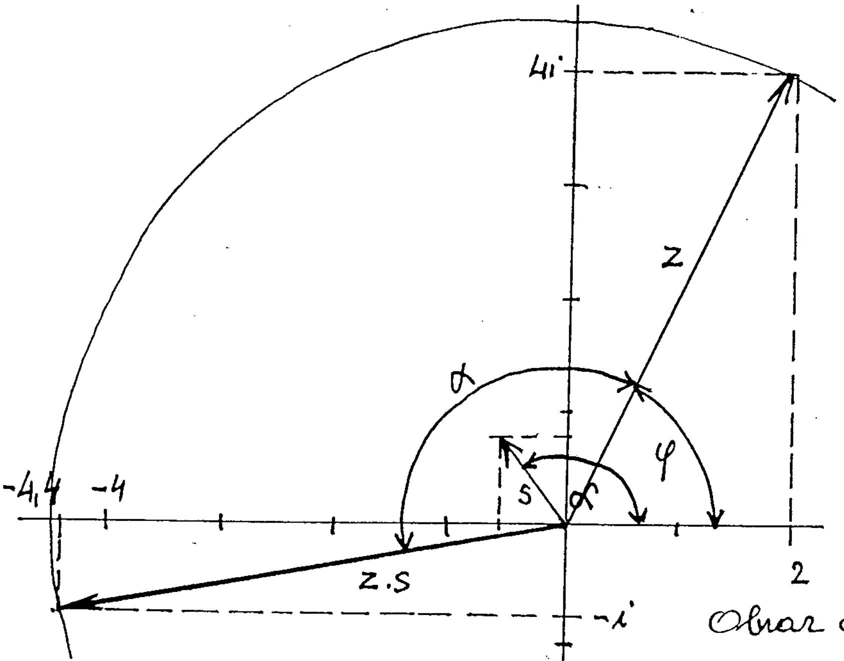
d) Násobení komplexní jednotkou

Příklad 14:



Komplexní číslo $z = 2 + 4i$ vynásobte komplexní jednotkou $s = -0{,}6 + 0{,}8i$

$z \cdot s = (2+4i)\cdot(-0{,}6+0{,}8i) = -1{,}2 - 2{,}4i + 1{,}6i - 3{,}2 = -4{,}4 - 0{,}8i$



Součin z.s má stejnou absolutní hodnotu jako číslo z; platí:

$|zs| = \sqrt{4{,}4^2 + 0{,}8^2} = \sqrt{20}$

$|z| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$

Argument φ čísla z se změní na $(\varphi + \alpha)$, kde α je argument kompl. jednotky s.

Obraz čísla z se otočí o argument α kompl. jednotky s.

Obraz součinu komplex. čísla a kompl. jednotky sestrojíme v Gaussově rovině tak, že obraz tohoto čísla otočíme kolem počátku o argument komplexní jednotky.

---

e) Násobení kompl. čísla libovolným kompl. číslem je dost složité a pro další výpočty však postradatelné. Pojednání o tom příklad 15 na str. 62 v učebnici G. Nebudeme zde rozebírat.

Příklad 15: Vynásobte:

a) $(1-2i)\cdot(3+2i) = 3-6i+2i-4i^2 = 3-4i+4 = \boxed{7-4i}$

b) $(3+5i)\cdot(3-5i) = 3^2-(5i)^2 = 9-(25i^2) = 9-(-25) = 9+25 = 34$

c) $(5-i)\cdot(5+i) = 5^2-(i^2) = 25-(-1) = 25+1 = 26$

Příklad 16: Pro která čísla $x, y \in R$ budou komplexní čísla

$z_1 = 5+xyi$, $z_2 = x+y-4i$

Řešení:

$x+y=5$

$xy=4$

$x = \frac{4}{y}$

$\frac{4}{y}+y=5 \quad |\cdot y$

$4+y^2=5y$

$y^2-5y+4=0$

$y_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2} = \frac{5\pm3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

Pro $y=4$ je $x+4=5$

$x=1$

Pro $y=1$ je $x+1=5$

$x=4$

Výsledek: $\boxed{x=4, y=1}$ v $\boxed{x=1, y=4}$

Příklad 17: Vypočítejte

a) $(2+3i)\cdot(4-2i)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}i\right) = (8+12i-4i+6)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}i\right) =$

$= (14+8i)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}i\right) = 7+4i-10{,}5i+6 = \boxed{13-6{,}5i}$

b) $(2+i)^2 = 4+4i+i^2 = 4+4i-1 = 3+4i$

c) $(1+i)^3 =$ podle $(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

$= 1+3\cdot1^2\cdot i+3\cdot1\cdot i^2+i^3 = 1+3i-3-i = -2+2i$

Příklad 18: Vypočítejte absolutní hodnotu součinu

$(\sqrt{3}+i\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$; nejdříve určíme součin =

$= \sqrt{6}+2i-3i-\sqrt{6}i^2 = \sqrt{6}-i+\sqrt{6} = 2\sqrt{6}-i$

$|2\sqrt{6}-i| = \sqrt{4\cdot6+1} = \sqrt{25} = 5$

Dělení komplexních čísel

Podíl $\frac{z_1}{z_2}$ kompl. čísel, $z_1, z_2 \neq 0$ je součin čísla z_1 a čísla převráceného k číslu z_2, tj. $\frac{z_1}{z_2} = z_1\cdot\frac{1}{z_2}$.

Postupujeme obvykle tak, že $\frac{z_1}{z_2}$ rozšíříme číslem $\overline{z_2}$ – viz příklady.

Příklad 19: Vypočítejte:

a) $$\frac{1+2i}{3+4i}=\frac{(1+2i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{3+6i-4i-8i^2}{9-16i^2}=\frac{3+2i+8}{9+16}=\frac{11+2i}{25}=\boxed{\frac{11}{25}+\frac{2}{25}i}$$

b) $$\frac{4+5i}{3+2i}=\frac{(4+5i)\cdot(3-2i)}{(3+2i)\cdot(3-2i)}=\frac{12+15i-8i+10}{9+4}=\frac{22+7i}{13}=\boxed{\frac{22}{13}+\frac{7}{13}i}$$

c) $$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}i}=\frac{1\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}i}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}i)^2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}i}{3-(2i^2)}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}i}{3+2}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{5}-\frac{\sqrt{2}}{5}i}$$

d) $$1-\frac{i}{i+1}+(i-1)\cdot i=1-\frac{i(i-1)}{(i+1)\cdot(i-1)}+i^2-i=1-\frac{i^2-i}{i^2-1}+(-1)-i=$$
$$=1-\frac{-1-i}{-1-1}-1-i=\cancel{1}-\frac{-1-i}{-2}-\cancel{1}-i=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-i=\boxed{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}$$

e) $$\frac{i+1}{i}:\frac{i-1}{2i+3}=\frac{(i+1)\cdot i}{i\cdot i}\cdot\frac{2i+3}{i-1}=\frac{i^2+i}{i^2}\cdot\frac{(2i+3)(i+1)}{(i-1)\cdot(i+1)}=$$
$$=\frac{-1+i}{-1}\cdot\frac{2i^2+3i+2i+3}{i^2-1}=(1-i)\cdot\frac{-2+5i+3}{-1-1}=(1-i)\cdot\frac{1+5i}{-2}=$$
$$=(1-i)\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{5}{2}i+\frac{5}{2}i^2=-\frac{1}{2}-2i-\frac{5}{2}=\boxed{-3-2i}$$

Příklad 20: Řešte rovnici, tj. najděte taková reálná čísla x, y, která jsou jejím řešením.

$$\frac{3-2i}{1+i}=2x+yi$$
$$\frac{(3-2i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=2x+yi$$
$$\frac{3-2i-3i-2}{1^2+1^2}$$

$$\frac{1-5i}{2}=2x+yi$$
$$\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i=2x+yi$$
$$2x=\frac{1}{2}\quad\wedge\quad y=-\frac{5}{2}$$
$$x=\frac{1}{4}$$

Rovnice má řešení

$$\boxed{x=\frac{1}{4},\ y=-\frac{5}{2}}$$

Příklad 21: Řešte rovnici s neznámou $\underline{z}$ v oboru $\underline{C}$.

$$(4+3i)\cdot \mathbf{z} = (5-i)\cdot(\mathbf{z}+3)$$

Při řešení usilujeme o to, aby neznámá $\underline{z}$ byla na levé straně rovnice, ostatní výrazy na její pravé straně.

$$4z+3iz = 5z - iz + 15 - 3i$$
$$4z - 5z + 3iz + iz = 15 - 3i$$
$$-z + 4iz = 15 - 3i$$
$$z(-1+4i) = 15 - 3i \quad | : (-1+4i)$$
$$z = \frac{15-3i}{-1+4i}$$

$$z = \frac{(15-3i)\cdot(-1-4i)}{(-1+4i)\cdot(-1-4i)}$$
$$z = \frac{-15+3i-60i+12i^2}{1+16}$$
$$z = \frac{-15-57i-12}{17}$$
$$z = \frac{-27-57i}{17}$$
$$\boxed{z = -\frac{27}{17} - \frac{57}{17}i}$$

Příklad 22: Řešte rovnici s neznámou $x \in C$:

$$(1+i)\cdot(x+3-2i) = (4+i)^2$$

$$x + xi + 3 + 3i - 2i + 2 = 16 + 8i - 1$$
$$x(1+i) = 10 + 7i \quad | : (1+i)$$
$$x = \frac{10+7i}{1+i}$$
$$x = \frac{(10+7i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}$$

$$x = \frac{10+7i-10i+7}{1+1}$$
$$x = \frac{17-3i}{2}$$
$$\boxed{x = \frac{17}{2} - \frac{3}{2}i} \quad \text{nebo} \quad \boxed{x = 8{,}5 - 1{,}5i}$$

Příklad 23: Řešte rovnici v oboru C:

$$\left(5 - \frac{1}{i}\right)\cdot \bar{z} + 2z = 22i$$

Provedeme sub. $z = a+bi$, $\bar{z} = a-bi$

$$\left(5 - \frac{1\cdot i}{i\cdot i}\right)\cdot(a-bi) + 2(a+bi) = 22i$$
$$\left(5 - \frac{i}{-1}\right)\cdot(a-bi) + 2(a+bi) = 22i$$
$$(5+i)\cdot(a-bi) + 2(a+bi) = 22i$$
$$5a + ai - 5bi + b + 2a + 2bi = 22i$$
$$7a + b + ai - 3bi = 22i$$
$$(7a+b) + (a-3b)i = 0 + 22i$$

$$7a + b = 0 \quad | \cdot 3$$
$$a - 3b = 22$$

$$21a + 3b = 0$$
$$a - 3b = 22$$
$$22a = 22$$
$$\boxed{a = 1}$$

$$7 + b = 0$$
$$\boxed{b = -7}$$

$$\boxed{z = 1 - 7i} \quad \text{výsledek}$$

Převod alg. tvaru komplexního čísla na goniometrický tvar

Komplexní číslo $z = a + bi$ vyjadřujeme v goniometrickém tvaru

$$\boxed{1} \quad \boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)},$$ kde

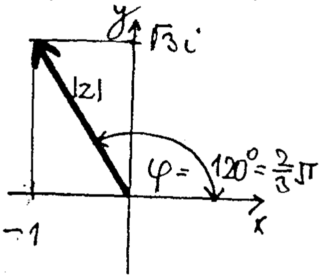
číslo φ je argument kompl. čísla, $r = |z|$.

Při převodu kompl. čísla z alg. tvaru na goniometrický tvar používáme vzorec

$$\boxed{2} \quad \boxed{z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|} i\right)}$$

Příklad 24: Vyjádřete v goniometrickém tvaru:

a) $z = -1 + i\sqrt{3}$



$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$

$|z| = \sqrt{4} = 2$

Použijeme vzorec $\boxed{2}$

$$z = 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

$$z = 2\left(\underbrace{-\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}} i\right) = \boxed{2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)}$$

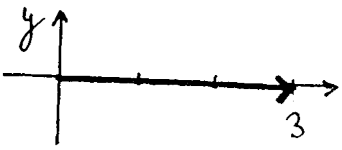
$\underbrace{\cos\varphi = -\frac{1}{2}}$ $\Downarrow$ $\varphi = \frac{2}{3}\pi$

$\underbrace{\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ $\Downarrow$ $\varphi = \frac{2}{3}\pi$

Toto je tvar příslušné kompl. jednotky.

---

b) $z = 3$

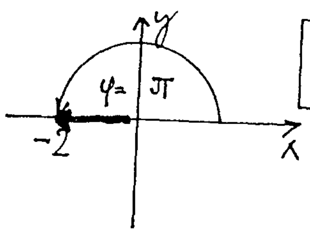


$|z| = |3| = 3$, $\varphi = 0\pi$ $(0°)$

$$\boxed{z = 3(\cos 0 + i\sin 0)}$$

---

c) $z = -2$

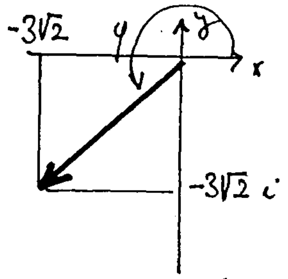


$|z| = |-2| = 2$, $\varphi = \pi$

$$\boxed{z = 2\cdot(\cos\pi + i\sin\pi)}$$

---

d) $z = -3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i \qquad |z| = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{9\cdot 2 + 9\cdot 2} = \sqrt{36} = 6$



$\varphi = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi \quad \left(\frac{5}{4} \text{ ze } 180^\circ = \frac{5}{4}\cdot 180^\circ = 225^\circ\right)$

$$\boxed{z = 6\cdot\left(\cos\tfrac{5}{4}\pi + i\sin\tfrac{5}{4}\pi\right)}$$ nebo

$$\boxed{z = 6\cdot\left(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ\right)}$$

Násobení a dělení kompl. čísel v gon. tvaru

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]}$$

Příklad 25: Určete součin a podíl kompl. čísel z_1 a z_2, je-li

a) $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\underbrace{\tfrac{1}{4}\pi}_{=\varphi_1} + i\sin\tfrac{1}{4}\pi\right) \qquad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\underbrace{\tfrac{7}{4}\pi}_{=\varphi_2} + i\sin\tfrac{7}{4}\pi\right)$

$z_1\cdot z_2 = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\left[\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{7}{4}\pi\right)\right]$

$= \boxed{4(\cos 2\pi + i\sin 2\pi} \quad \dots = 4(1+0) = \boxed{4}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{7}{4}\pi\right)\right] =$

$= 2\left[\cos\left(-\tfrac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(-\tfrac{3}{2}\pi\right)\right] \qquad 2\pi - \tfrac{3}{2}\pi = \tfrac{1}{2}\pi$

$= \boxed{2\left(\cos\tfrac{1}{2}\pi + i\sin\tfrac{1}{2}\pi\right)} \quad \dots \; 2\cdot(0+1i) = \boxed{2i}$

---

b) $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \qquad z_2 = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$z_1\cdot z_2 = \frac{9}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right] = \boxed{\frac{9}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$

$\dots \; \frac{9}{2}(0+1i) = \frac{9}{2}i = \boxed{4{,}5i}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{\frac{3}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \boxed{2\left(\cos\tfrac{1}{6}\pi + i\sin\tfrac{1}{6}\pi\right)} \dots \; 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right) =$

$= \boxed{\sqrt{3} + i}$

Příklad 26: Vyjádřete jako komplexní číslo v algebraickém tvaru.

a) $\dfrac{\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi}{2i} = \dfrac{\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi}{2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{1}{2}\pi\right)+i\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{1}{2}\pi\right)\right] =$

$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}}$

---

b) $\dfrac{1}{i}$ ... 1. způsob $\dfrac{1}{i} = \dfrac{1\cdot i}{i\cdot i} = \dfrac{i}{i^2} = \dfrac{i}{-1} = \boxed{-i}$

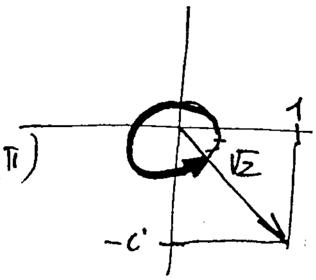
2. způsob pomocí vzorce $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$

$\dfrac{1}{i} = \dfrac{\cos 0+i\sin 0}{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1}\left[\cos\left(0-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(0-\frac{\pi}{2}\right)\right] =$ $|z_1|=1$, $|z_2|=1$

$= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = 0-1\cdot i = \boxed{-i}$

---

c) $\underbrace{(1-i)}_{z_1}\cdot\underbrace{\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)}_{z_2}$



$\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{4}$

$\varphi = \frac{7}{4}\pi$

$z_1\cdot z_2 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)\right]\cdot\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$

$=\sqrt{2}\cdot 1\left(\cos\frac{13}{6}\pi + i\sin\frac{13}{6}\pi\right)$

$=\sqrt{2}\left[\cos \cancel{2}\frac{1}{6}\pi + i\sin\cancel{2}\frac{1}{6}\pi\right]$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{6}\pi+i\sin\frac{1}{6}\pi\right) = \sqrt{2}.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{12}}{2}i = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}+2\sqrt{3}i}$

---

d) $\left[4.\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)\right].\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 135°+i\sin 135°)\right] =$

$=4(\cos 180°+i\sin 180°) = 4.(-1+0i) = \boxed{-4}$

---

e) $[2.(\cos 150°+i\sin 150°)].[3.(\cos-160°)+i\sin(-160°)].[0{,}5.(\cos 70°+i\sin 70°)] =$

$=2.3.0{,}5\left[\cos(150°-160°+70°)+i\sin(150°-160°+70°)\right] = 3.(\cos 60°+i\sin 60°) =$

$=3\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Příklad 27: Rozložte na součiny

a) x^2+9y^2 .... Postup: $\underbrace{\sqrt{x^2}}_{x}$, $\underbrace{\sqrt{9y^2}}_{3y}$ a přidáš i

$x^2+9y^2=(x+3yi).(x-3yi)$

b) $u^2+v^2=(u+vi).(u-vi)$

c) $a^2+16b^2=(a+4bi).(a-4bi)$

d) $5+2y^2=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{2})^2y^2i=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{2}y)^2=(\sqrt{5}+\sqrt{2}yi).(\sqrt{5}-\sqrt{2}yi)$

Zkouška: $(\sqrt{5}+\sqrt{2}yi).(\sqrt{5}-\sqrt{2}yi)=\sqrt{25}+\cancel{\sqrt{10}yi}-\cancel{\sqrt{10}yi}+(\sqrt{2}yi)^2=$

$=5+(\sqrt{2})^2.y^2.i^2=5+2y^2.(-1)=5+2y^2$

Příklad 28.

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{-2}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2=$$

$$\left[\frac{(1+i).(1+i)}{(1-i).(1+i)}\right]^2+\left[\frac{(1-i).(1-i)}{(1+i).(1-i)}\right]^2=\left[\frac{(1+i)^2}{1+1}\right]^2+\left[\frac{(1-i)^2}{1+1}\right]^2=$$

$$\frac{(1+2i-1)^2}{4}+\frac{(1-2i-1)^2}{4}=\frac{(2i)^2}{4}+\underbrace{\frac{(-2i)^2}{4}=\frac{(2i)^2}{4}+\frac{4i^2}{4}}$$

$$=\frac{4i^2}{4}+\frac{-4}{4}=\frac{-4}{4}-\frac{4}{4}=-1-1=\boxed{-2}$$

nebo $\frac{4i^2}{4}+\frac{4i^2}{4}=\frac{8i^2}{4}=2i^2=-2$

Další psaní příklady:

Mocniny imaginární jednotky:

$$\boxed{i^{4k+1}=i \qquad i^{4k+2}=-1 \qquad i^{4k+3}=-i \qquad i^{4k}=1}$$

čti na str. 1

Příklad 29: $i^7=i^{4+3}=-i$ $\qquad i^{22}=i^{20+2}=-1$

$i^{41}=i^{40+1}=i$ $\qquad i^{36}=i^{4\cdot 9}=1$

Řešení kvadratických rovnic v oboru C

Příklad 30: Řešte rovnice:

a) $x^2-4x+5=0$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{4\pm 2i}{2}= \begin{cases} x_1=2+2i \\ x_2=2-i \end{cases}$$

---

b) $x^2-4x+6=0$

$\sqrt{-1\cdot 2}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{2}=i\sqrt{2}$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-24}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-8}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4.(-2)}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{-2}}{2}=\frac{4\pm 2i\sqrt{2}}{2}= \begin{cases} 2+i\sqrt{2} \\ 2-i\sqrt{2} \end{cases}$$

---

c) $x^2+2=0$

$x^2=-2$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-2}=\pm\sqrt{-1.2}=\pm i\sqrt{2}= \begin{cases} i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} \end{cases}$$

---

d) $3x^2-4x+2=0$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-24}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{-8}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{4.(-2)}}{6}=\frac{4\pm 2\sqrt{-2}}{6}=\frac{4\pm 2\sqrt{2.(-1)}}{6}$$

$$=\frac{4\pm 2\sqrt{2}.\sqrt{-1}}{6}=\frac{4\pm 2.\sqrt{2}.i}{6}=\frac{2\pm i\sqrt{2}}{3}= \begin{cases} \frac{2+i\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2-i\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

---

e) $2x^2+2x+1=0$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{4}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{4}=\frac{-2\pm\sqrt{4.(-1)}}{4}=\frac{-2\pm\sqrt{4}.\sqrt{-1}}{4}=\frac{-2\pm 2i}{4}$$

$$=\frac{-1\pm 2i}{2}= \begin{cases} -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{cases}$$

---

f) $\sqrt{x^2+8ix+9}=-x+i$

$x^2+8ix+9=(-x+i)^2$

$\cancel{x^2}+8ix+9=\cancel{x^2}-2xi-1$

$10ix=-10$

$x=-\frac{10}{10i}$

$x=-\frac{1}{i}$

$$x=-\frac{1.i}{i.i}=-\frac{i}{-1}=\boxed{i}$$
