Příklady ze sbírky pro OA.

3.1 Úhel a jeho velikost

1) Vyjádřete v obloukové míře (výběr úloh):

$$\boxed{x_{rad} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180}}$$

UZOREC NA PŘEVOD ÚHLOVÉ MÍRY NA OBLOUKOVOU

$\alpha = 30° \ldots x = \frac{\pi \cdot 30}{180} = \frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{6}\pi\right)$	$\alpha = 45° \ldots x = \frac{\pi \cdot 45}{180} = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\pi$
$\alpha = 60° \ldots x = \frac{\pi \cdot 60}{180} = \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}\pi$	$\alpha = 150° \ldots x = \frac{\pi \cdot 150}{180} = \frac{5}{6}\pi \left(\frac{5\pi}{6}\right)$

2) Vyjádřete v obloukové míře (výběr úloh):

$$\alpha = 52°24' \ldots x = \frac{\pi \cdot 52\frac{24}{60}}{180} = \pi \cdot \frac{52\frac{24}{60}}{180} = \pi \cdot 0{,}291111 = \boxed{0{,}914\,552\,528}$$

Na kalkulačce $\left(52\frac{24}{60} : 180\right)$ [×] [SHIFT] [EXP] (π) nebo

52 [°'''] 24 [°'''] [÷] 180 [=] [×] [SHIFT] [EXP] (π) [=] [°'''] $\boxed{0{,}914\,552\,528}$

$\alpha = 252°14'$ podle návodu ↑ je rovno $\boxed{4{,}402\,302\,15}$.

---

3) Vyjádřete ve stupňové míře úhly dané obloukovou mírou (výběr úloh).

$$\boxed{\alpha = \frac{x_{rad} \cdot 180}{\pi}}$$

UZOREC PRO PŘEVOD OBLOUKOVÉ MÍRY NA ÚHLOVOU MÍRU

$$x = \frac{\pi}{8} \ldots \alpha = \frac{\frac{\pi}{8} \cdot 180}{\pi} = \frac{\frac{180\pi}{8}}{\pi} = \frac{180\pi}{8\pi} = 22{,}5 \ldots 22{,}5° = \boxed{22°30'}$$

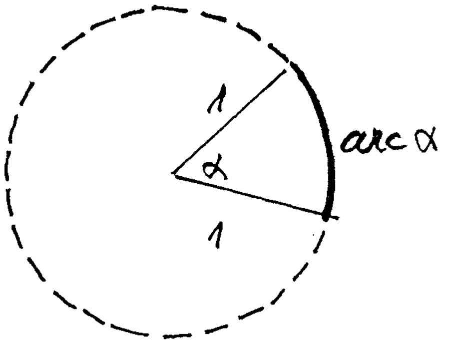
$$x = \frac{\pi}{7} \ldots \alpha = \frac{\frac{\pi}{7} \cdot 180}{\pi} = \frac{180\pi}{7\pi} = \frac{180}{7} = 25{,}71428571 = 25°42'51{,}43'' =$$

$$= \boxed{25°43'}$$

Na kalkulačce: $\frac{180}{7}$ [=] [°'''] $25°42'51{,}43'' \doteq 25°43'$

Definice: Délka $\frac{\pi\alpha}{180}$ oblouku jednotkové kružnice (viz obr.), který přísluší středovému úhlu s velikostí α (udané ve stupňové míře), se nazývá arkus alfa (označuje se arc α); je

$\boxed{\text{arc}\,\alpha = \frac{\pi\alpha}{180}}$, z toho odvodíme $\boxed{\alpha = \frac{180 \cdot \text{arc}\,\alpha}{\pi}}$



4. Vypočítejte (výběr úloh):

arc 36°

$$\text{arc}\,\alpha = \frac{\pi\alpha}{180} = \frac{\pi \cdot 36}{180} = \frac{1}{5}\pi \doteq \boxed{0{,}628\,318\,53}$$

arc 115° … $\text{arc}\,115° = \frac{\pi \cdot 115}{180} \doteq \boxed{2{,}007\,128\,64}$

---

5. Určete α ve stupních, je-li (výběr úloh):

$$\text{arc}\,\alpha = \frac{5}{12}\pi \;\dots\; \alpha = \frac{180 \cdot \text{arc}\,\alpha}{\pi} = \frac{180 \cdot \frac{5}{12}\pi}{\pi} = \frac{\frac{900\cancel{\pi}}{12}}{\frac{\cancel{\pi}}{1}} = \frac{900}{12} = 75 \dots \boxed{75°}$$

$$\text{arc}\,\alpha = \frac{\pi}{8} \dots \alpha = \frac{180 \cdot \frac{\pi}{8}}{\pi} = \frac{\frac{180\cancel{\pi}}{8}}{\frac{\cancel{\pi}}{1}} = \frac{180}{8} = 22{,}5 \dots \boxed{22°30'}$$

3.2 Goniometrické funkce ostrého úhlu

Výběr úloh (s ohledem na cotgx)

1. Určete na kalkulačce:

cotg 88°15' … najdu tg a získanou hodnotu převrátím

[tan] 88°15' [=] [x^{-1}] [=] $\boxed{0{,}030\,552\,763}$!

---

2. Určete úhel α, když platí cotg α = 3,74. Při řešení této úlohy využijeme rovnost $\boxed{\text{cotg}\,\alpha = \text{tg}\,(90° - \alpha)}$, což nebudeme zde dokazovat.

90 [°'''] [−] [SHIFT] [tan] 3,74 [=] [°'''] 14° 58' 10,38'' !

Toto tlačítko se v tomto místě musí vynechat.

3. Vypočítejte:

$\mathrm{tg}\, 37°14' \cdot \mathrm{cotg}\, 88°12'$

$\boxed{\tan}$ 37°14' $\boxed{=}$ do paměti pod A

$\boxed{\tan}$ 88°12' $\boxed{=}$ $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{=}$ do paměti pod B

ALPHA $\boxed{A}$ $\boxed{\times}$ ALPHA $\boxed{B}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0{,}023\ 882\ 663}$

---

4. Vypočítejte:

$\dfrac{\sin 30° - \cos 60°}{\sin 45° + \cos 45°}$ výpočet pomocí tabulky $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{0}{\sqrt{2}} = \boxed{0}$

výpočet pomocí kalkulačky $= \dfrac{0{,}5 - 0{,}5}{0{,}707... + 0{,}707} = \dfrac{0}{1{,}41...} = \boxed{0}$

$\dfrac{\mathrm{tg}\, 45° + \mathrm{cotg}\, 45°}{\mathrm{tg}\, 60°}$ (viz tabulka hodnot) $= \dfrac{1 + 1}{\sqrt{3}} =$

$= \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ a usměrníme $\dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$

$\dfrac{\sin 30° \cdot \cos 30° - \sin 60° \cdot \cos 60°}{\mathrm{tg}\, 45° \cdot \mathrm{cotg}\, 45°} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot 1} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}}{1} = \dfrac{0}{1} = \boxed{0}$

---

5. Vypočítejte:

$\dfrac{\sin^2 30°}{\sin^2 45°} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \dfrac{4}{8} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

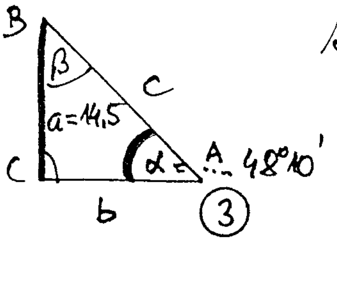
$\dfrac{\mathrm{tg}^2 30°}{\mathrm{cotg}^2 30°} = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{\frac{3}{9}}{3} = \dfrac{\frac{3}{9}}{\frac{3}{1}} = \dfrac{3 \cdot 1}{3 \cdot 9} = \boxed{\dfrac{1}{9}}$

---

3. Řešení pravoúhlého △ (výběr úloh):

1. a 181 $a = 14{,}5\,\mathrm{cm}$

$\alpha = 48°\,10'$



$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b} \Rightarrow b = \dfrac{a}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \dfrac{14{,}5}{\mathrm{tg}\, 48°10'} =$

$= 12{,}97968... \doteq 12{,}98$ (cm)

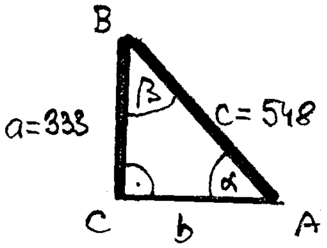
$\boxed{b = 12{,}98\,\mathrm{cm}}$

$\sin\alpha = \frac{a}{c} \ldots c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{14{,}5}{\sin 48°10'} \doteq 19{,}46$ $\boxed{c \doteq 19{,}46\ \text{cm}}$

$\beta = 90° - 48°10' = 41°50'$ $\boxed{\beta = 41°50'}$

Poznámka: Je výhodné vložit hodnotu 48°10' do paměti kalkulačky a pak ji podle potřeby vyvolat.

2b/181 Řešte pravoúhlý △: $a = 333$ cm, $c = 548$ cm.



$b^2 = c^2 - a^2 = 548^2$

$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{548^2 - 333^2}$ .. na kalkulačce:

548 $\boxed{x^2}$ − 333 $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$ 435,218 .. $\boxed{b \doteq 435{,}22\ \text{cm}}$

$\sin\alpha = \frac{a}{c} \ldots \sin\alpha = \frac{333}{548}$ na kalkulačce:

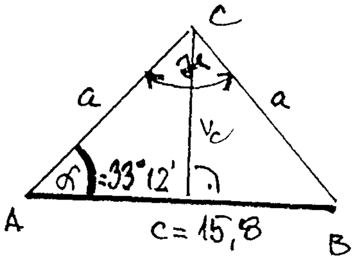
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{(}$ 333 $\boxed{a\,b/c}$ (:) 548 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ $\boxed{°\,'\,''}$ 37°25'14,89"

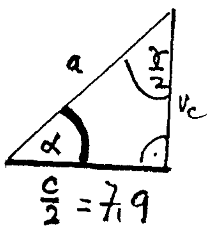
$\boxed{\alpha \doteq 37°25'}$ Hodnotu β bychom mohli počítat takto $90° - 37°25'$, ale pomocí gon. funkce (důvod: co kdyby byla hodnota α špatně vypočítána?)

$\cos\beta = \frac{a}{c} \ldots \cos\beta = \frac{333}{548} \Rightarrow \beta \doteq 52°35'$

Zkouška: $\alpha + \beta = 37°25' + 52°35' = 90°$

3c/181 V rovnoramenném △ o základně $\underline{c}$ a ramenech $\underline{a}$ je dáno: $\alpha = 33°12'$, $c = 15{,}8$ cm, určete $\underline{a}$, v_c, γ.





$\cos\alpha = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{a}{1}}$

$\cos\alpha = \frac{c}{2a}$

$2a = \frac{c}{\cos\alpha} \quad | \cdot \frac{1}{2}$

$a = \frac{c}{2\cdot\cos\alpha}$

$a = \frac{15{,}8}{2\cdot\cos 33°12'}$

$\boxed{a \doteq 9{,}44\ (\text{cm})}$ nebo

$\cos 33°12' = \frac{7{,}9}{a}$

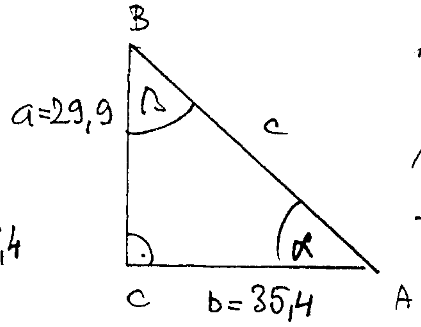
$a = \frac{7{,}9}{\cos 33°12'}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_c}{\frac{c}{2}} \quad \ldots \quad \operatorname{tg} 33°12' = \frac{v_c}{7{,}9}$$

$$v_c = 7{,}9 \cdot \operatorname{tg} 33°12' \doteq 5{,}17 \ldots \quad \boxed{v_c \doteq 5{,}17\,\text{cm}}$$

$$\frac{\gamma}{2} = 90° - \alpha = 90° - 33°12' = 56°48', \quad \gamma = 2(56°48') = 113°36', \quad \boxed{\gamma = 113°36'}$$

4a/181 $S = 529{,}23\ \text{cm}^2$, $a = 29{,}9\ \text{cm}$



$$S = \frac{ab}{2}$$

$$2S = ab$$

$$b = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 529{,}23}{29{,}9} = 35{,}4$$

$$\boxed{b = 35{,}4\,\text{cm}}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{29{,}9^2 + 35{,}4^2} \doteq 46{,}34$$

$$\boxed{c \doteq 46{,}34\,\text{cm}}$$

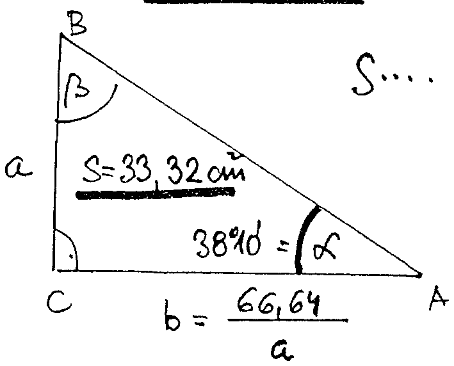
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{29{,}9}{35{,}4} \Rightarrow \boxed{\alpha \doteq 40°11'}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{35{,}4}{29{,}9} \Rightarrow \boxed{\beta \doteq 49°49'}$$

4b/181 <u>náročnější</u>, $S = 33{,}32\ \text{cm}^2$, $\alpha = 38°10'$, jsou dané údaje



$$S \ldots \quad \frac{ab}{2} = 33{,}32 \quad | \cdot 2$$

$$ab = 66{,}64$$

$$b = \frac{66{,}64}{a}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} 38°10' = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{66{,}64}{a}}$$

$$\operatorname{tg} 38°10' = \frac{a^2}{66{,}64}$$

$$a^2 = 66{,}64 \cdot \operatorname{tg} 38°10'$$

$$a = \sqrt{66{,}64 \cdot \operatorname{tg} 38°10'}$$

$a \doteq 7{,}237\,248\,108$ (dej do paměti)

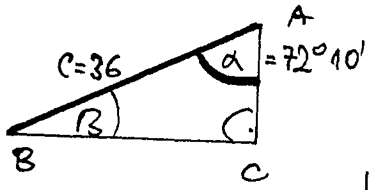
$$\boxed{a \doteq 7{,}24\,\text{cm}}$$

$$b = \frac{66{,}64}{7{,}237\ldots} = \underbrace{9{,}207\ldots}_{\text{do paměti}} \quad \boxed{b \doteq 9{,}21\,\text{cm}}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \doteq 11{,}711\ldots \quad \boxed{c \doteq 11{,}7\,\text{cm}}$$

$$\beta = 90° - 38°10' = 51°50' \quad \boxed{\beta = 51°50'}$$

5a/81 Určete obsah prav. $\triangle ABC$, je-li $c = 36\,cm$, $\alpha = 72°10'$.



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$a = c \cdot \sin\alpha = 36 \cdot \sin 72°10' = \underbrace{34,27\ldots}_{\text{do paměti}}$

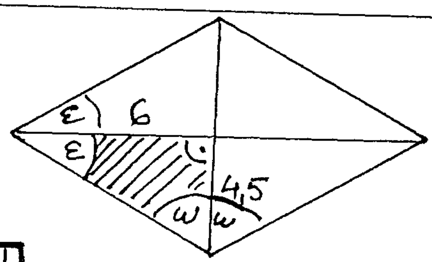
$\cos\beta = \frac{b}{c}$

$b = c \cdot \cos\beta = 36 \cdot \cos 72°10' = \underbrace{11,024\ldots}_{\text{do paměti}}$

$S = \frac{ab}{2}$

$\boxed{S \doteq 188,914\ cm^2}$

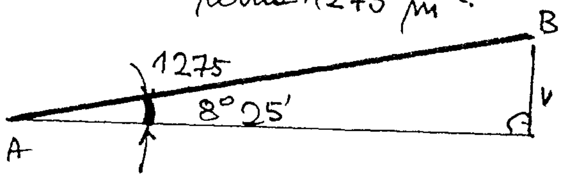
6/81 Určete úhel dvou sousedních stran kosočtverce, jehož úhlopříčky jsou $u_1 = 12\,cm$, $u_2 = 9\,cm$.



$\mathrm{tg}\,\varepsilon = \frac{4,5}{6} \Rightarrow \varepsilon \doteq 36°52'$, $2\varepsilon \doteq \boxed{73°44'}$

$\mathrm{tg}\,\omega = \frac{6}{4,5} \Rightarrow \omega \doteq 53°8'$, $2\omega \doteq \boxed{106°16'}$

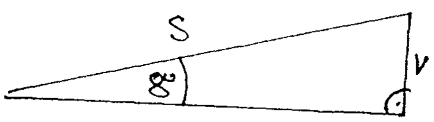
9/82 Jaký je výškový rozdíl míst A a B na trati, která má stoupání 8°25', je-li vzdálenost míst A a B rovna 1275 m?



$\sin 8°25' = \frac{v}{1275}$

$v = 1275 \cdot \sin 8°25' = \boxed{186,623\ (m)}$

10/82 Jak vysoko vystoupá letadlo letící rychlostí $500\ \frac{km}{h}$ za 5 minut, stoupá-li pod úhlem 8°?

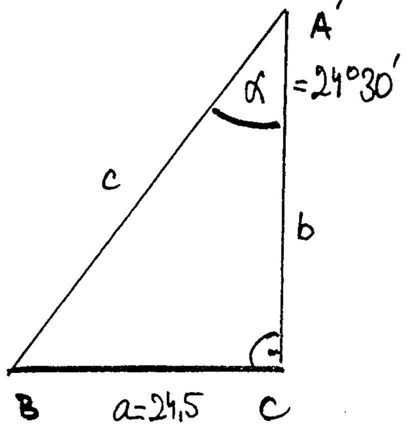


$s = 500 \cdot \frac{5}{60} = 41\frac{2}{3}\ (km)$

$\sin 8° = \frac{v}{s} \ldots = \frac{v}{41\frac{2}{3}}$

$v = \sin 8° \cdot 41\frac{2}{3} \doteq \boxed{5,799\ (km)}$

18/182 Určete těžnice pravoúhlého △, je-li $a = 24{,}5$, $\alpha = 24°30'$.



$\mathrm{tg}\, 24°30' = \dfrac{24{,}5}{b}$

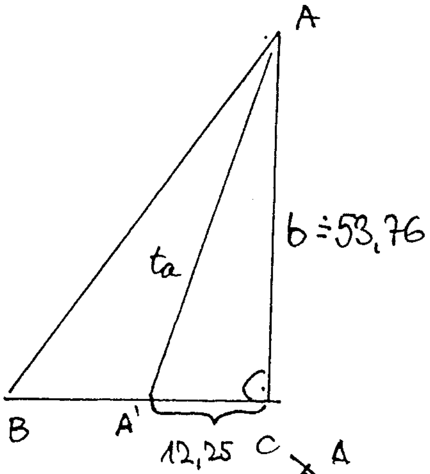
$b = 24{,}5 : \mathrm{tg}\, 24°30'$

$\boxed{b \doteq 53{,}76}$

$\sin 24°30' = \dfrac{24{,}5}{c}$

$c = 24{,}5 : \sin 24°30'$

$\boxed{c = 59{,}0798}$

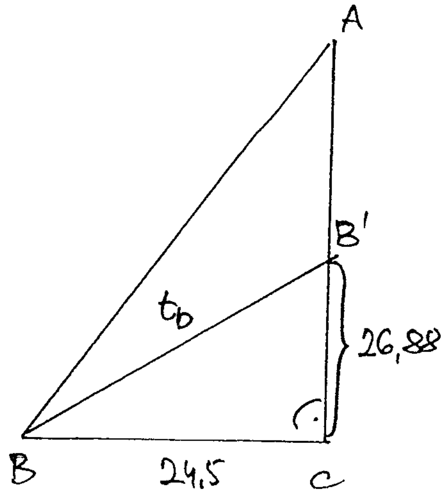


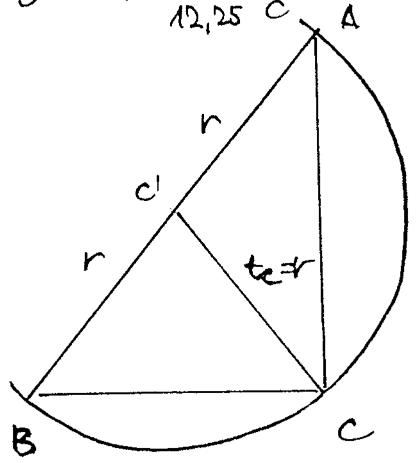
$t_a = \sqrt{12{,}25^2 + 53{,}76^2}$

$\boxed{t_a \doteq 55{,}138}$

$t_b = \sqrt{26{,}88^2 + 24{,}5^2}$

$\boxed{t_b \doteq 36{,}37}$



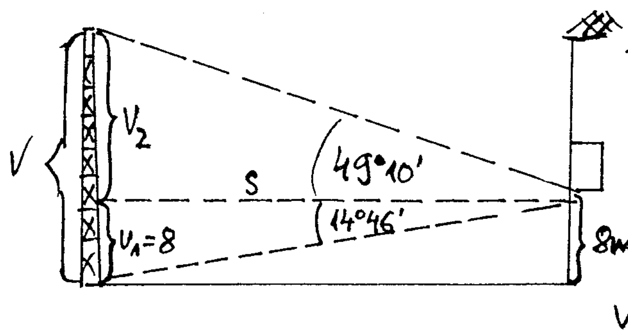


t_c = poloměr kružnice opsané pravoúhlému △

$t_c = \dfrac{|AB|}{2} = \dfrac{c}{2} = \dfrac{59{,}0798}{2}$

$\boxed{t_c \doteq 29{,}54}$

23/183 Z okna 8 m nad horizontální rovinou vidíme vrchol stožáru v elevačním úhlu 49°10' a jeho patu v hloubkovém úhlu 14°46'. Jak vysoký je stožár?



$\mathrm{tg}\, 14°46' = \dfrac{8}{s}$

$s = \dfrac{8}{\mathrm{tg}\, 14°46'} = 30{,}35$

$\mathrm{tg}\, 49°10' = \dfrac{v_2}{s}$

$\mathrm{tg}\, 49°10' = \dfrac{v_2}{30{,}35}$

$v_2 = 30{,}35 \cdot \mathrm{tg}\, 49°10' = 35{,}119$

$v = v_1 + v_2 = 8 + 35{,}119 = \boxed{43{,}119\,(m)}$