10 b) SHODNÁ ZOBRAZENÍ

(Mezi shodná zobrazení v rovině patří: osová souměrnost, středová souměrnost, posunutí, otočení.

Rozlišujeme a) přímou shodnost

b) nepřímou shodnost (obraz je shodný se svým vzorem až po jeho otočení o 180° – z líce na rub – např. na průsvitce)

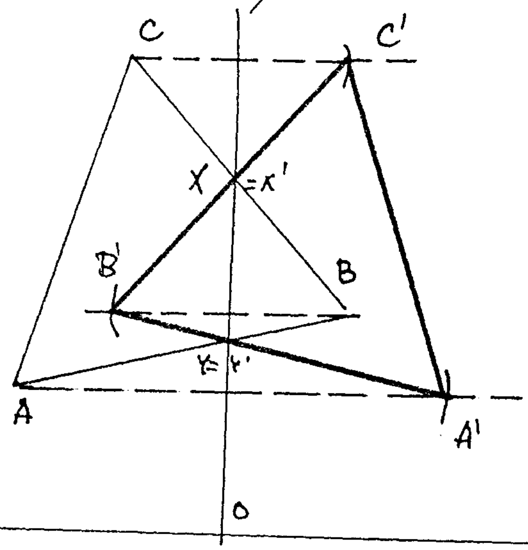
Ve shodném zobrazení je (jsou) obrazem

- přímky AB přímka A'B',
- dvou rovnoběžek dvě rovnoběžky,
- polopřímky AB polopřímka A'B',
- opačných polopřímek opačné polopřímky,
- poloroviny pA polorovina pA', opačných polorovin opačné poloroviny,
- úhlu AVB úhel A'V'B' shodný s úhlem AVB,
- útvaru U útvar U' shodný s útvarem U.

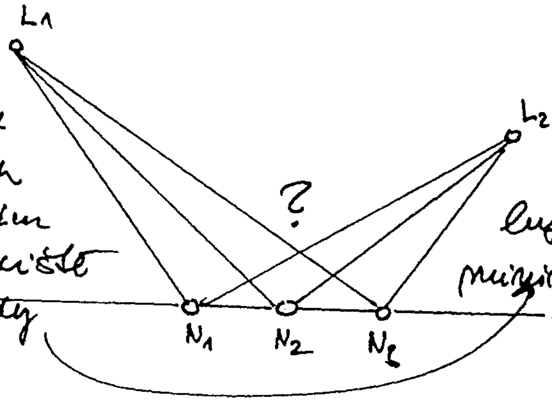
Osová souměrnost (O)o je nepřímá shodnost určená osou o

Příklad 1: Narýsujte libovolný △ABC a přímku o, která protíná strany b, c v jejich vnitřních bodech. Sestrojte obraz A'B'C' trojúhelníku ABC v osové souměrnosti (O)o.

X,X' a Y,Y' jsou samodružné body.

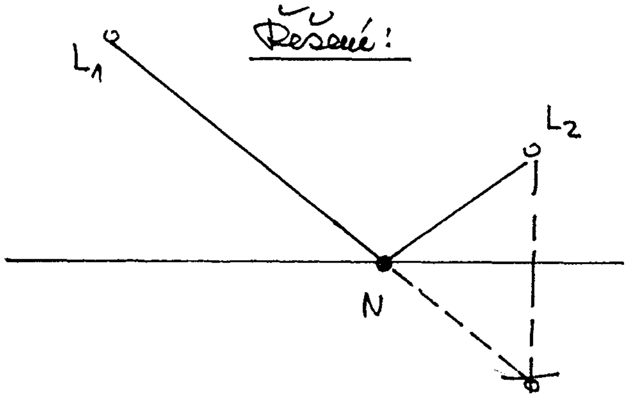


Příklad 2: Vápenec z lomů L_1 a L_2 leží na téže straně přímé železniční trati, bude dopravován po přímých silnicích k nákladišti N (viz obr.). Ve kterém místě u trati se má toto nákladiště vybudovat, aby dopravní náklady

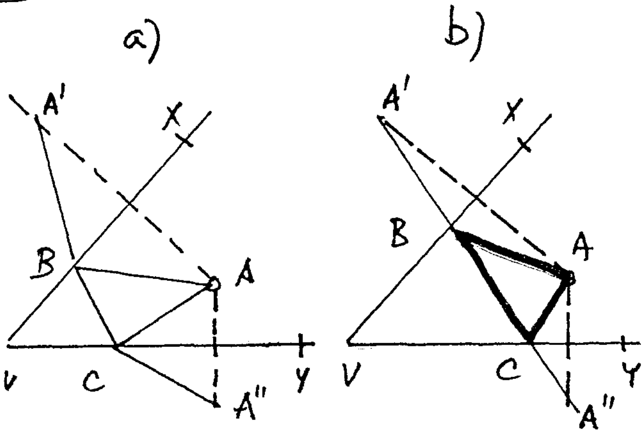


byly minimální?

Řešení:



Příklad 3: Je dán ostrý úhel XVY a jeho vnitřní bod A. Narýsujte △ABC, který bude mít co nejmenší obvod a jehož vrchol B bude ležet na rameni VX a vrchol C na rameni VY úhlu XVY.

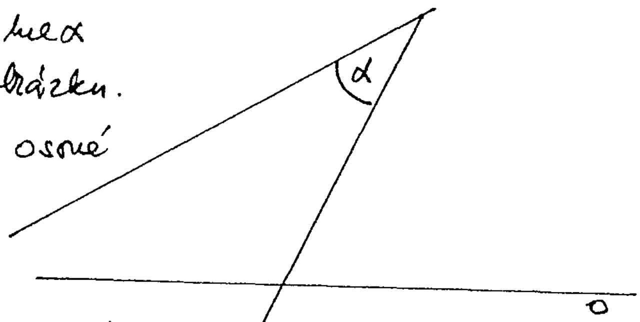


Rozbor (viz obr. a): Sestrojíme bod A' souměrně sdružený s bodem A podle přímky VX jako osy souměrnosti a bod A'' souměrně sdružený s bodem A podle přímky VY jako osy souměrnosti. Z vlastností těchto dvou osových souměrností $(O_1)\ \overleftrightarrow{VX}$, $(O_2)\ \overleftrightarrow{VY}$ plyne:

$AB \cong A'B \quad \wedge \quad AC \cong A''C$.

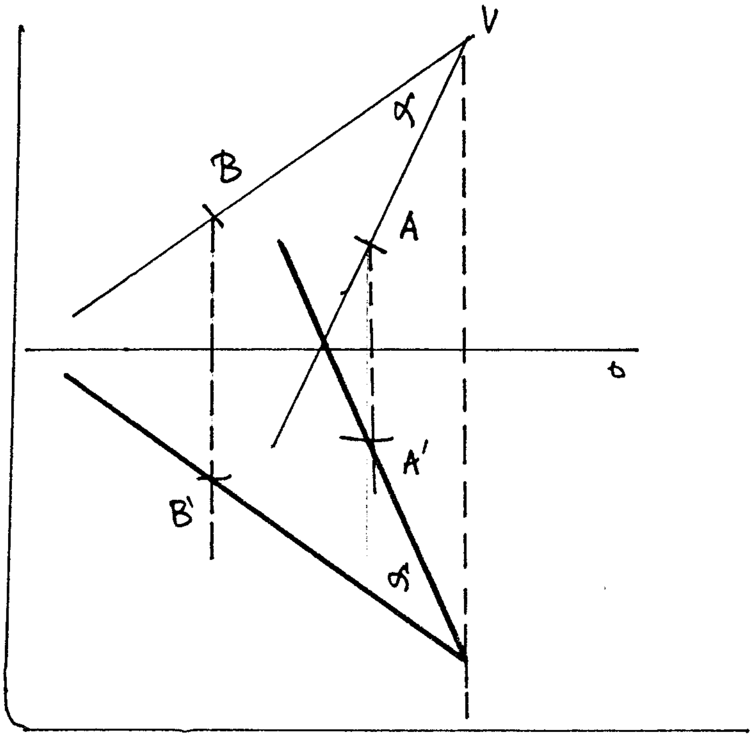
Obvod trojúhelníku $ABC = |AB|+|BC|+|AC|$ a ten je dále roven $|A'B|+|BC|+|A''C|$, čili obvod △ABC se rovná délce lomené čáry A'BCA''. Tato čára bude mít nejkratší délku, budou-li body B, C ležet na úsečce A'A''. Odtud plyne konstrukce (obr. b): Body A', A'' spojíme jako úsečku A'A''. Její průsečíky s rameny VX a VY jsou vrcholy hledaného △.

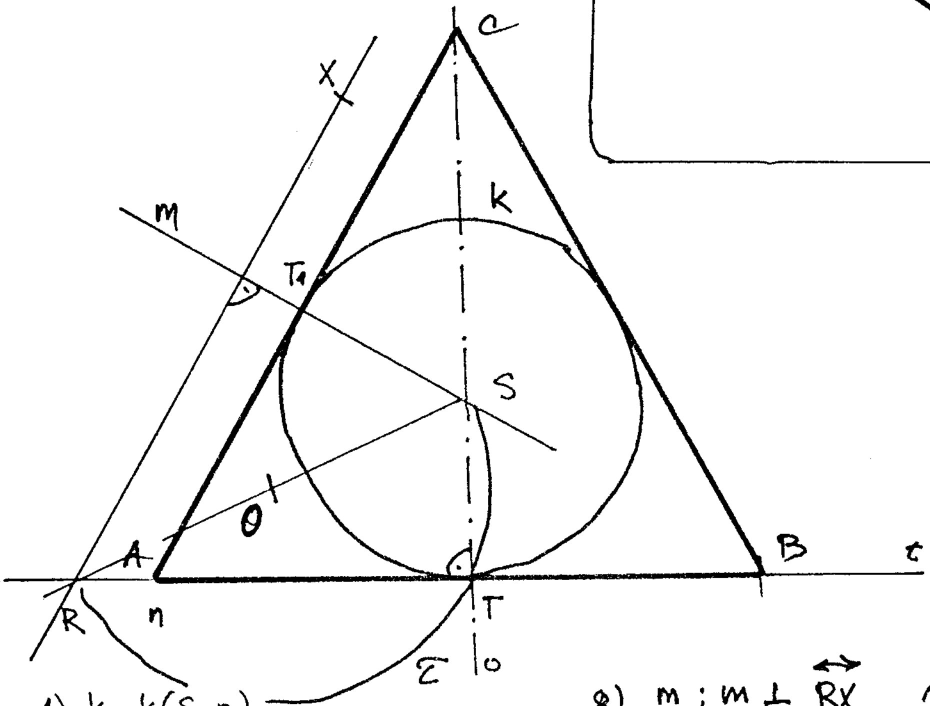
Příklad 4: Narýsujte ostrý úhel α a přímku o tak jako na obrázku. Sestrojte obraz α' úhlu α v osové souměrnosti $(O)_o$.



Řešení: Na ramenech úhlu vyznačíme dva libovolné body A, B a vrchol označíme V... konstrukce je dále.

Příklad 5: Narýsujte libovolnou kružnici $k(S;r)$ a mimo této kružnici zvolte bod R ($|SR|>r$). Sestrojte rovnostranný $\triangle ABC$ tak, aby bod R ležel na přímce AB a kružnice k byla kružnice $\triangle$ vepsaná. Při konstrukci využijte osovou souměrnost.





1) k; $k(S;r)$

2) R; R je mimo k

3) O; $O \in RS$; $|RO| = |SO|$

4) τ; $\tau(O; \frac{|RS|}{2})$; Thal. kr.

5) T; $T \in \tau \cap k$

6) t; $t = \overleftrightarrow{RT}$ (t je tečna k)

7) $\sphericalangle XRT$; $|\sphericalangle XRT| = 60°$

8) m; $m \perp \overleftrightarrow{RX}$ $\wedge$ $n \parallel m$

9) T_1; $T_1 \in m \cap n$

10) $\overleftrightarrow{ST}$; osa souměrnosti $\triangle ABC$ … o

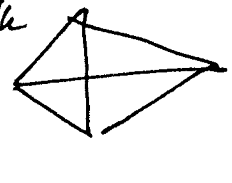
11) C; $C \in o \cap n$

12) AC; $|AC|$ je délka strany rovnost. $\triangle ABC$

13) AB; $|AB| = |AC|$

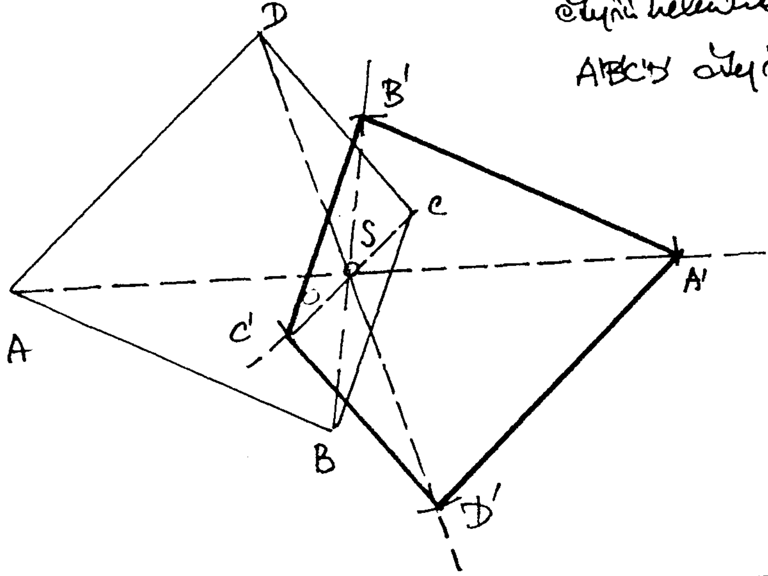
14) $\triangle ABC$

Příklad 6: Narýsuj všechny osy souměrnosti čtverce, obdélníku, kosočtverce a deltoidu. Čtverec má 4 osy, obdélník 2 osy, kosočtverec 2 osy, deltoid 1 osu

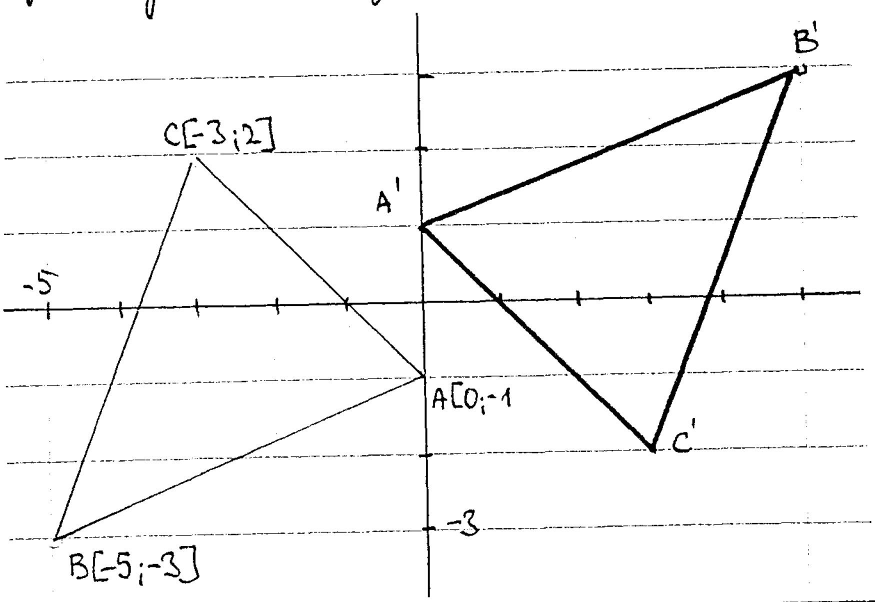


Středová souměrnost je přímá shodnost určená středem (jediným bodem). Zapisujeme $\mathcal{S}(S)$, $\mathcal{S}(O)$ atd.

<u>Příklad 7:</u> Středem souměrnosti je bod S, který leží uvnitř čtyřúhelníku ABCD. Sestrojte obraz A'B'C'D' čtyřúhelníku ABCD ve středové souměrnosti $\mathcal{S}(S)$.



<u>Příklad 8:</u> V pravoúhlé soustavě souřadnic je dán $\triangle ABC$, kde $A[0;-1]$, $B[-5;-3]$, $C[-3;2]$. Určete souřadnice vrcholů $\triangle A'B'C'$, který je středově souměrný s $\triangle ABC$ podle počátku soustavy souřadnic. Co zjišťujete?



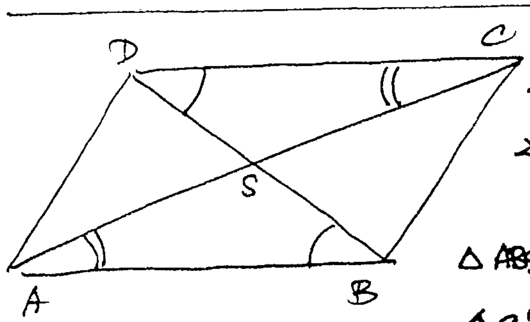
$A'[0;1]$, $B'[5;3]$, $C'[3;-2]$

Souřadnice obrazu bodů jsou opačná čísla k souřadnicím bodů vzoru.

<u>Příklad 9:</u>

a) Ověřte, že rovnoběžník ABCD je středově souměrný podle průsečíku jeho úhlopříček.

b) Dokažte, že úhlopříčky rovnoběžníku se navzájem půlí.

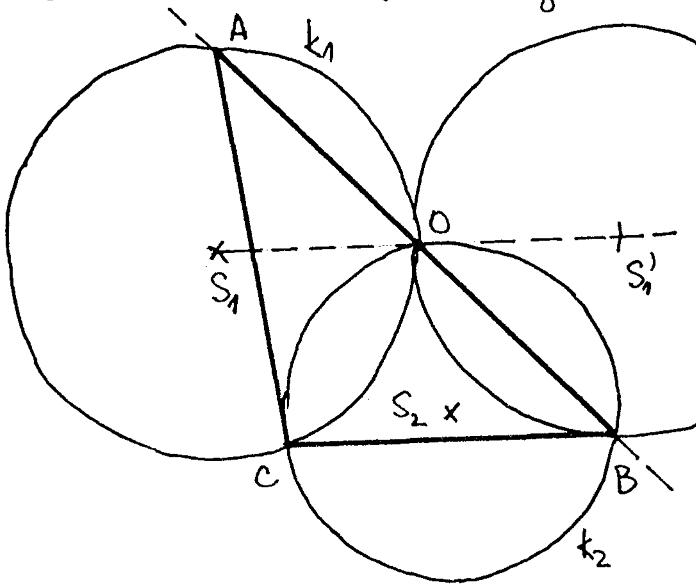


$\left.\begin{array}{l}\measuredangle ACD \cong \measuredangle CAB \\ \measuredangle CDB \cong \measuredangle ABD\end{array}\right\}$ střídavé úhly

$\triangle ABS \cong \triangle CDS$ (usu) $\Rightarrow$

$AS \cong CS \wedge BS \cong DS$

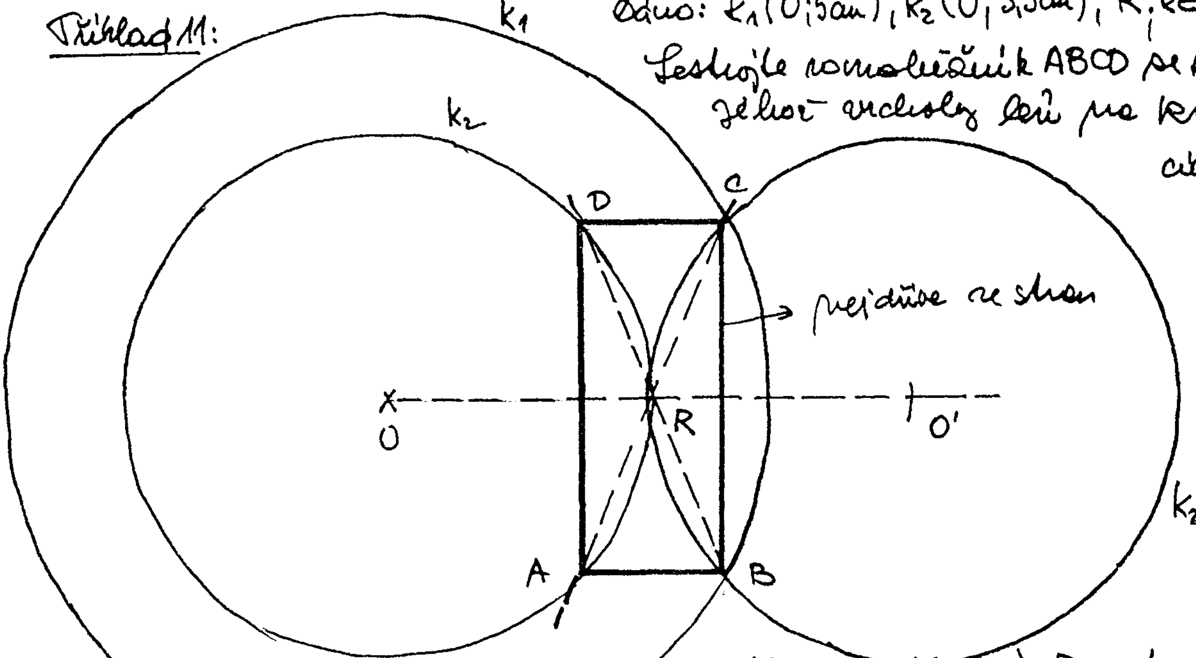
Příklad 10: Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$, kde $r_1 > r_2$, které se protínají ve dvou bodech C, O. Sestrojte $\triangle ABC$ tak, aby $A \in k_1$, $B \in k_2$ a aby strana AB byla bodem O půlena.



Myšlenka: Body A, B musí ležet na středově souměrných kružnicích.

1) k_1, k_2; $k_1 \cap k_2 = \{C, O\}$, $r_1 > r_2$
2) k_1'; ve středové souměrnosti $\varphi(O)$ $k_1 \to k_1'$
3) B; $B \in k_1' \cap k_2$
4) A; ve středové souměrnosti $\varphi(O): B \to A$
5) $\triangle ABC$ (1 řešení)

Příklad 11: Dáno: $k_1(O; 5\,cm)$, $k_2(O; 3{,}5\,cm)$ soustředné, R; $R \in k_2$. Sestrojte rovnoběžník ABCD se středem R, jehož vrcholy leží na kružnicích k_1, k_2.

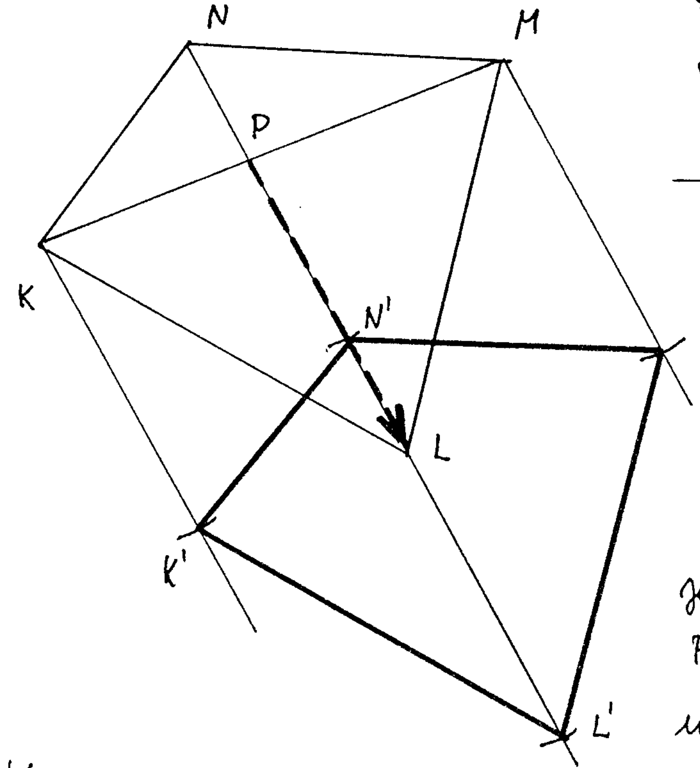


1) $k_1(O; r_1)$, $k_2(O; r_2)$, $R \in k_2$
2) k_2'; v $\varphi(R)$ $k_2 \to k_2'$, $O \to O'$
3) B, C; $k_1 \cap k_2 = \{B, C\}$
4) A, D; $\varphi(R)$ $C \to A$, $B \to D$ — 1 řešení

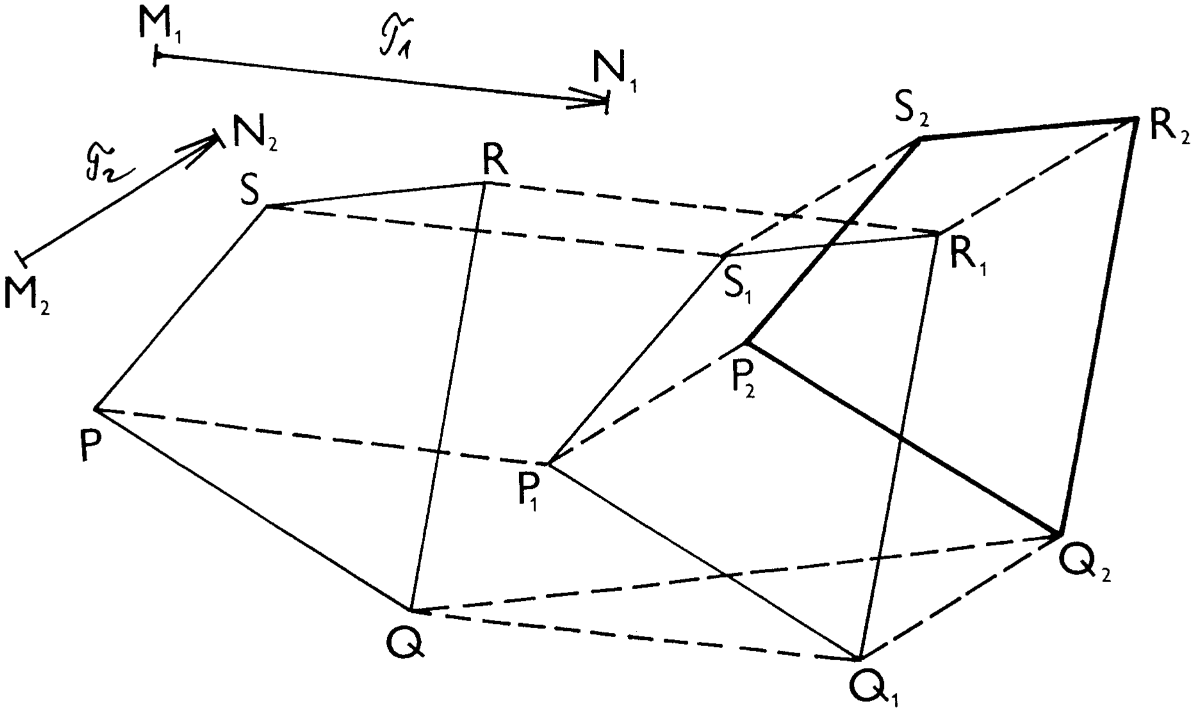
Posunutí (translace) je určené orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$, což zapíšeme $T(\overrightarrow{AB})$.

Příklad 12: Sestrojte obraz K'L'M'N' čtyřúhelníku KLMN v posunutí $T(\overrightarrow{PL})$, kde $P \in KM \cap LN$.

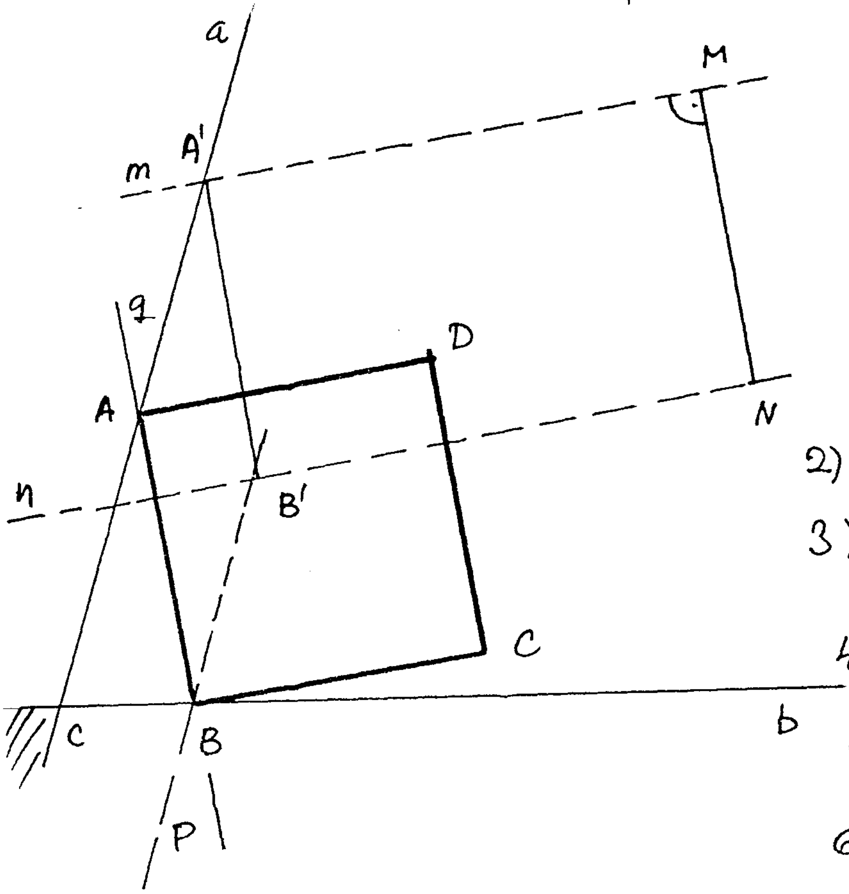
Řešení je vlevo.



Příklad 13: Je dáno posunutí $T_1(\overrightarrow{M_1N_1})$ a $T_2(\overrightarrow{M_2N_2})$. Na dolním obrázku je čtyřúhelník PQRS a T_1, T_2. Čtyřúhelník $P_1Q_1R_1S_1$ je obrazem čtyřúhelníku PQRS v posunutí T_1 a čtyřúhelník $P_2Q_2R_2S_2$ je obrazem čtyřúhelníku $P_1Q_1R_1S_1$ v posunutí T_2. Řekneme, že $P_2Q_2R_2S_2$ je obrazem čtyřúhelníku PQRS ve složeném zobrazení $T = T_1 + T_2$.



Příklad 14: Jsou dány různoběžky a, b s průsečíkem c a úsečka MN ($|MN| = 4cm$, $MN \nparallel a$, $MN \nparallel b$ a MN není kolmá k žádné přímce a, b. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby $A \in a$, $B \in b$, $AB \parallel MN$, $|AB| = |MN|$



Postup:

1) a, b, $a \nparallel b$, $a \cap b = \{c\}$

2) MN, $|MN| = 4,5cm$ atd.

3) m; $M \in m \wedge \underbrace{m \perp MN}_{\text{důležité}}$

4) A'; $A' \in m \cap a$

5) n; $N \in n \wedge n \parallel m$

6) $A'B' \sim T_1(\overrightarrow{MA'})$

Čili úsečku MN jsme posunuli v T_1 do polohy $A'B'$

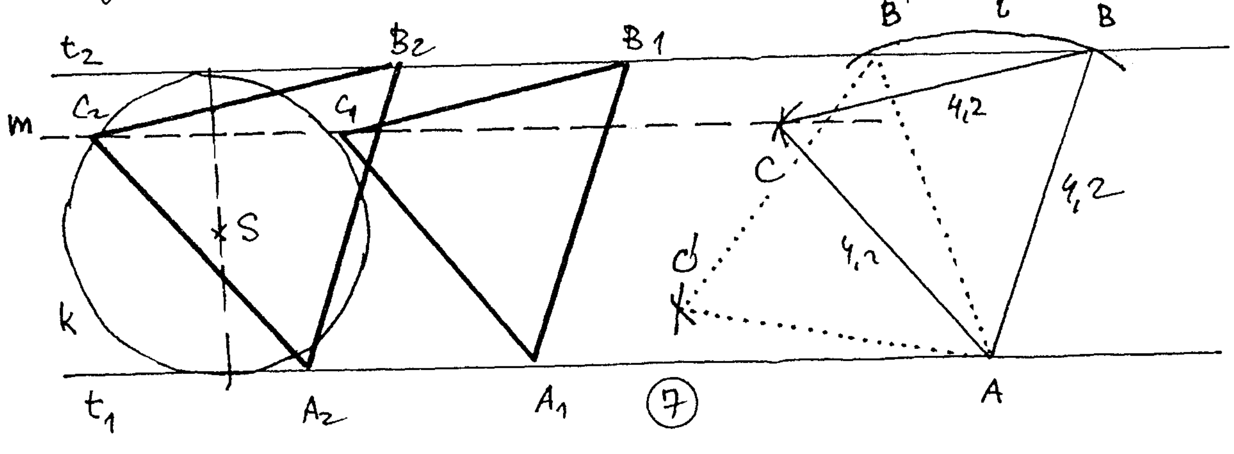
7) p; $B' \in p \wedge p \parallel m$

Jsou 2 řešení, další je v části znázorněné roviny.

8) B; $B \in p \cap b$ 9) q; $B \in q \cap b$

Čili úsečku $A'B'$ jsme posunuli v T_2 $(B'B)$; AB je strana požadovaného čtverce, který konstrukčně provedeme.

Příklad 15: Je dána kružnice $\underline{k}(S; 2cm)$ a dvě jejím rovnoběžné sečny t_1, t_2. Sestrojte rovnostranný $\triangle ABC$ se stranou $a = 4,2cm$ tak, aby $A \in t_1$, $B \in t_2$ a $C \in k$.



1) narýsujeme kružnici k a t_1, t_2

2) A; $A \in t_1$

3) l; $l(A; |AB| = 4{,}2\,cm)$, doplníme na pomocný $\triangle ABC$
(nebo $AB'C'$ ... to je pro další 2 řešení)

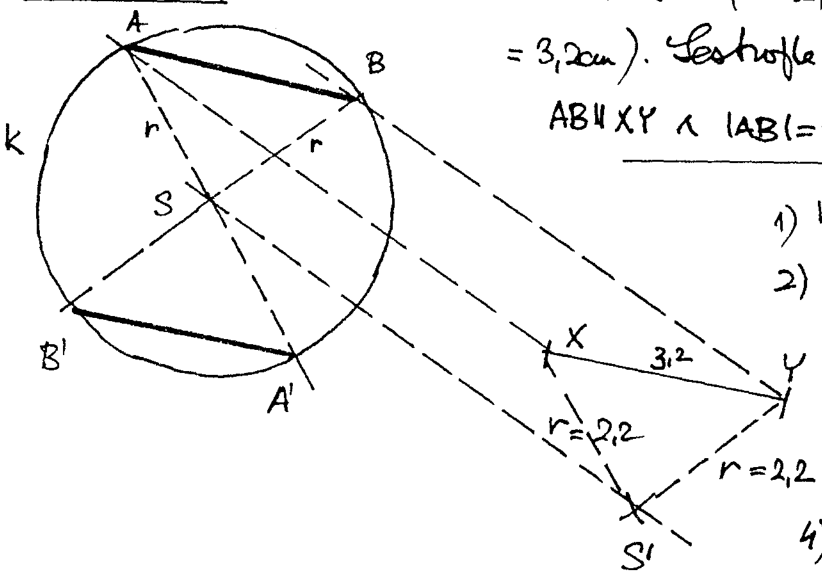
4) B; $B \in t_2 \cap l$

5) m; $m \parallel t_1, t_2 \wedge C \in m$, 6) $m \cap k = \{C_1, C_2\}$, tím jsem posunuli vrchol C do poloh C_1, C_2

$\triangle A_1B_1C_1$ je obrazem $\triangle ABC$ v $T_1(\overrightarrow{CC_1})$, $\triangle A_2B_2C_2$ v $T_2(\overrightarrow{CC_2})$

Pro obr. jsou 2 řešení. Další 2 řešení by vznikla posunutím $\triangle AB'C'$.

Příklad 16: Je dána kružnice $k(S; r = 2{,}2\,cm)$ a úsečka XY ($|XY| = 3{,}2\,cm$). Sestrojte tětivu AB tak, aby $AB \parallel XY \wedge |AB| = |XY|$.



1) k; $k(S; 2{,}2\,cm)$

2) XY; $|XY| = 3{,}2\,cm$

3) $\triangle XYS'$; $|XY| = 3{,}2\,cm$, $|XS'| = |YS'| = 2{,}2\,cm$.

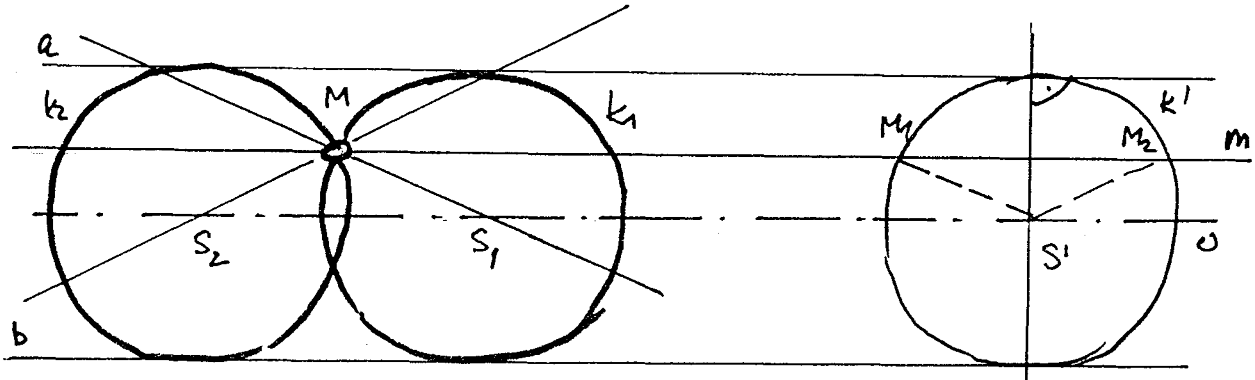
4) $S'S$

5) $\triangle XYS'$ posuneme v $T(\overrightarrow{S'S})$, čili vedeme rovnoběžky body X, Y, které protnou kružnici v bodech A, B.

AB je požadovaná tětiva. Tětivu $A'B'$ sestrojíme pomocí středové souměrnosti se středem S. Úloha má 2 řešení.

Příklad 17: Dáno: přímky a, b ($a \parallel b$) a bod M, který nenáleží rovinnému pásu a $M \notin a$, $M \notin b$, $M \notin o$, kde o je osa pásu. Sestrojte kružnici k, která se dotýká přímek a, b a prochází bodem M.

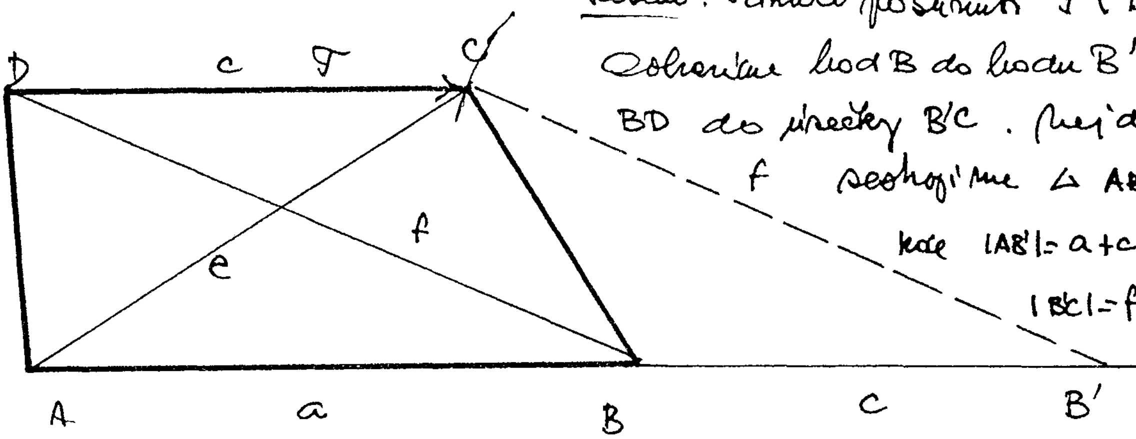
1) Sestrojíme pomocnou kružnici $k'(S'; r = \frac{1}{2}|ab|)$.



2) m; $m \parallel a, b$, $M \in m$ ... Poloměr pomocné kružnice k' se posune v $T_1(\overrightarrow{M_1M})$ ... atd.

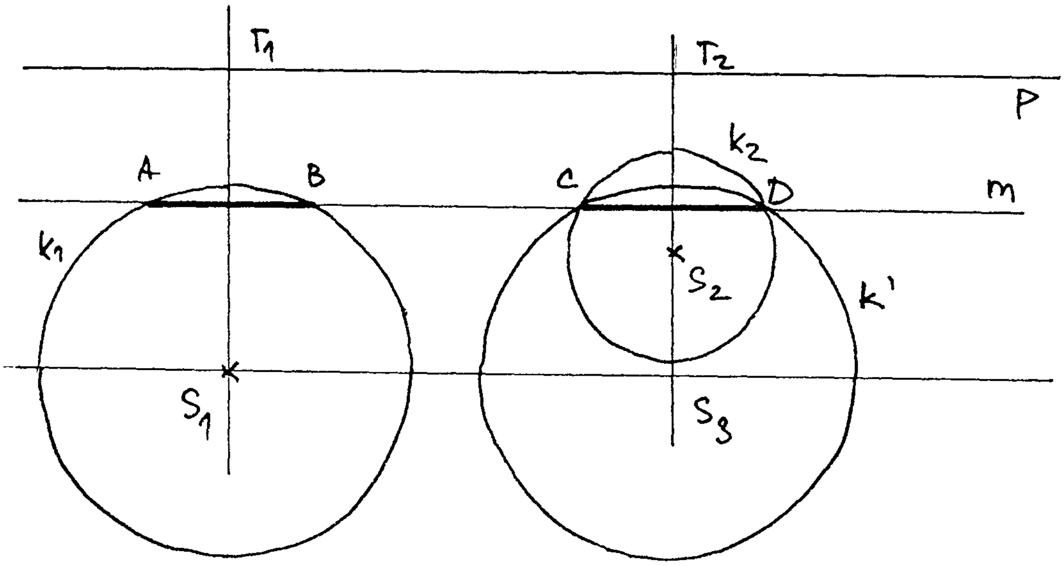
Příklad 18: Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), jsou-li dány délky obou základen ($a = 8$ cm, $c = 6$ cm) a obou úhlopříček $|AC| = e = 7$ cm, $|BD| = f = 9$ cm

Řešení: Pomocí posunutí $T(\overrightarrow{DC})$ zobrazíme bod B do bodu B', úsečku BD do úsečky $B'C$. Nejdříve sestrojíme $\triangle AB'C$, kde $|AB'| = a + c$, $|B'C| = f$, $|AC| = e$

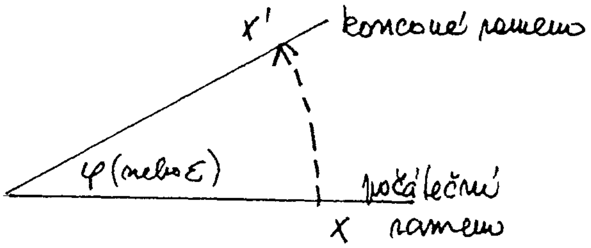


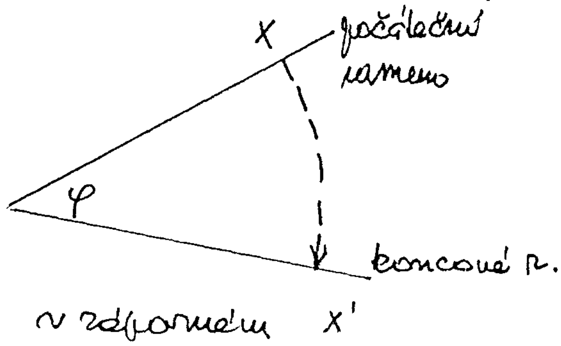
Příklad 19: Je dána přímka p a dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$, kde $r_1 > r_2$. Narýsujte přímku m rovnoběžnou s přímkou p tak, aby na obou kružnicích vytínala shodné tětivy.

Řešení: Sestrojíme kolmice S_1T_1 a S_2T_2 k přímce p ($T_1, T_2 \in p$). Posuneme kružnici k_1 do polohy $k'(S_3; r_1)$, kde $\overleftrightarrow{S_1S_3} \parallel p$.
Kružnice k' vytne na kružnici k_2 tětivu CD a na kružnici k_1 tětivu AB ($CD \cong AB$).



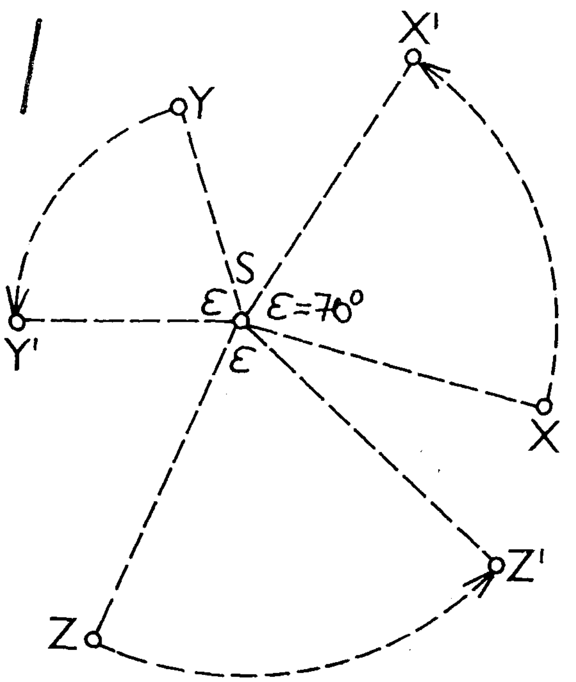
Otočení (rotace) je určené bodem S a orientovaným úhlem s velikostí φ. Zapisujeme $R(S;\varphi)$ nebo $R^{-1}(S;\varphi)$

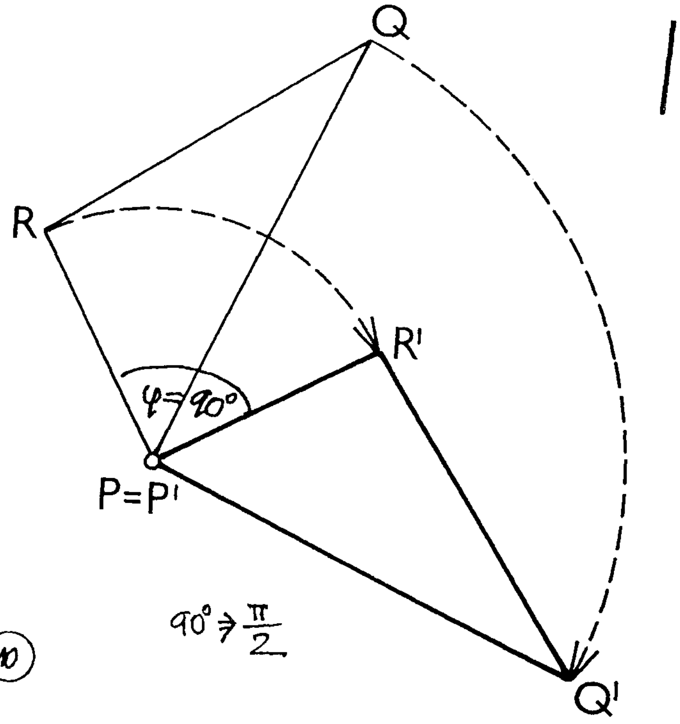




Otočení v kladném smyslu — v záporném smyslu

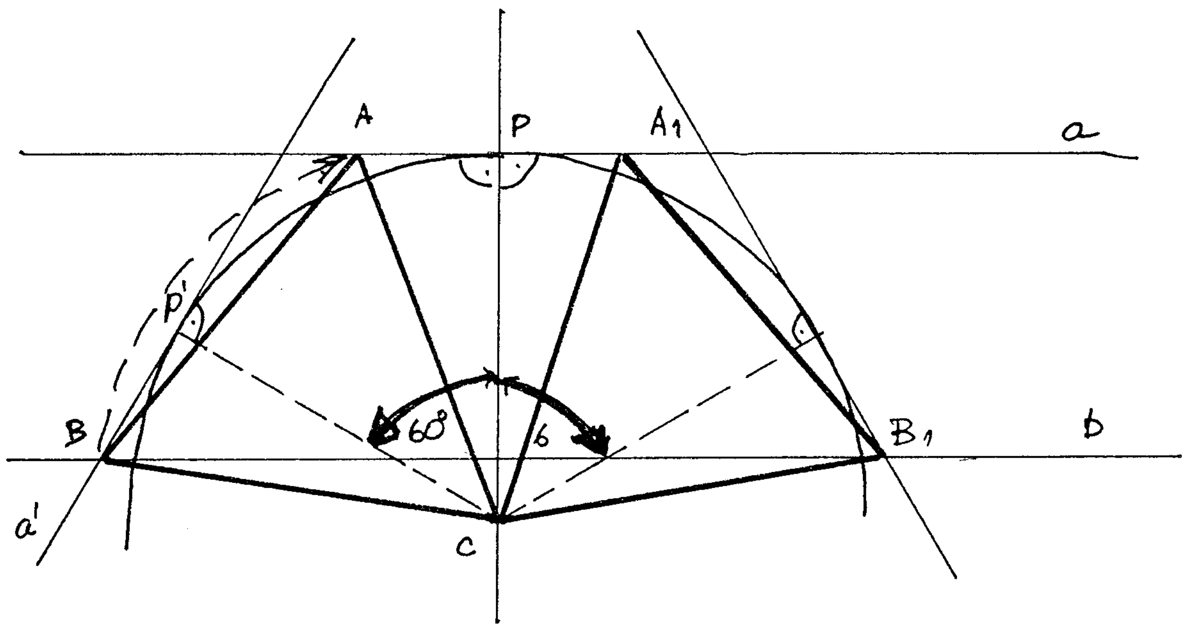
Příklad 20: otočení bodů ↓ otočení △ PQR ↓





$90° \Rightarrow \frac{\pi}{2}$

Příklad 21: Jsou dány rovnoběžné přímky a, b a mimo ně bod C. Sestrojte rovnostranný △ ABC tak, aby A ∈ a, B ∈ b.



1) a, b, C
2) $\overleftrightarrow{CP}$; $\overleftrightarrow{CP} \perp a$
3) přímku a otočím o 60° v R(C; 60°), získám a'
4) B; B ∈ a' ∩ b , BC je strana požadovaného △
5) A; A otočím v R^{-1}(C; 60°), B → A

Úloha má 2 řešení: △ ABC a △ A_1B_1C

Příklad 22 (ještě ne posunutí): Je dán obdélník KLMN (|KL| = 15,4 cm, |LM| = 5 cm. Sestrojte rovnostranný △ EFG (e = 5,3 cm) tak, aby E ∈ KL, F ∈ MN, G ∈ KN. (Začíná se jako u př. 15 volbou E').