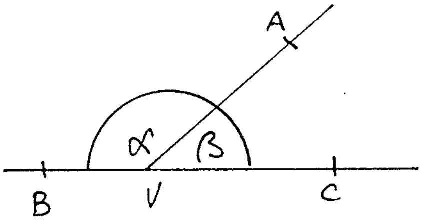
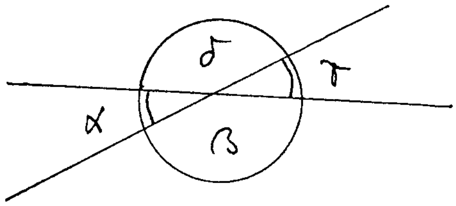
29 b) ÚHLY

Úhel je základní geometrický objekt širokého významu. Jeho konkrétní pojetí zpravidla odlišujeme různými přívlastky.

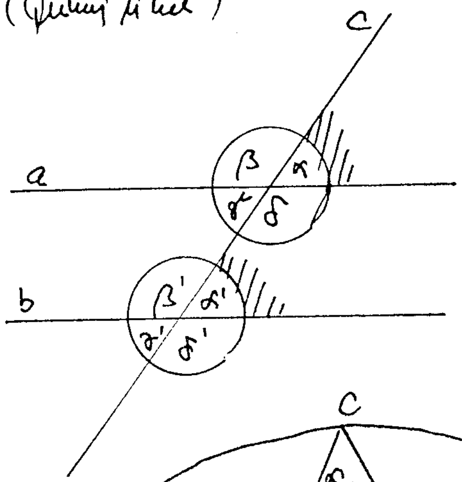
<u>Základní definice</u>: Část roviny omezená dvěma polopřímkami se společným počátkem se nazývá úhel.



vedlejší úhly ... $\alpha + \beta = 180°$
(přímý úhel)



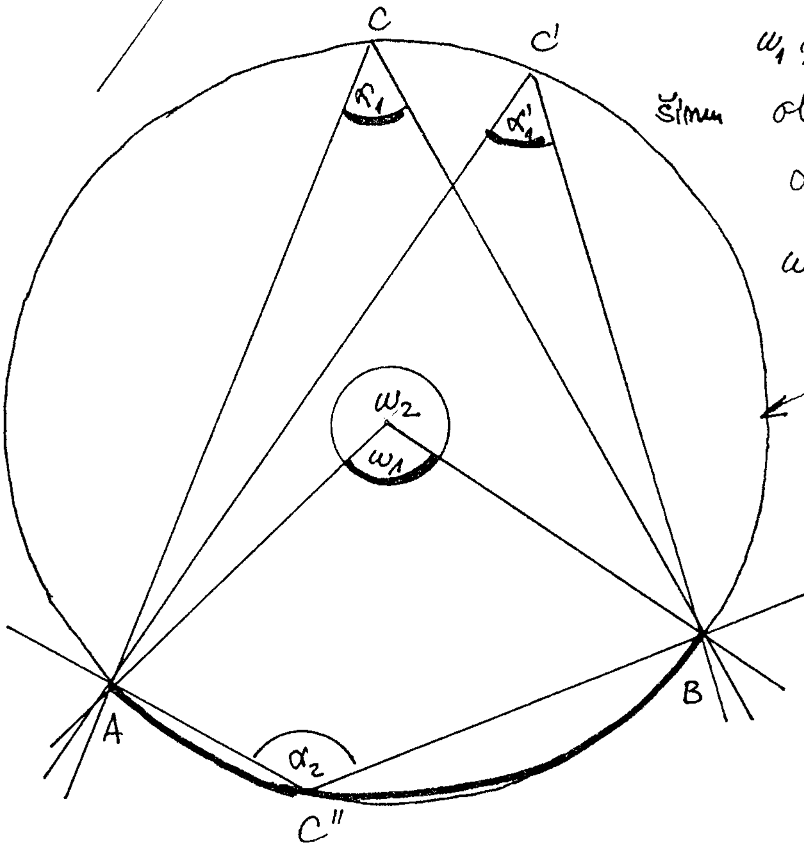
$\left.\begin{matrix}\alpha, \gamma \\ \beta, \delta\end{matrix}\right\}$ dvojice vrcholových úhlů ($\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$)



α, α' a jiné dvojice jsou souhlasné úhly

α, γ' a jiné dvojice jsou střídavé úhly

<u>c</u> je příčka rovnoběžek a, b



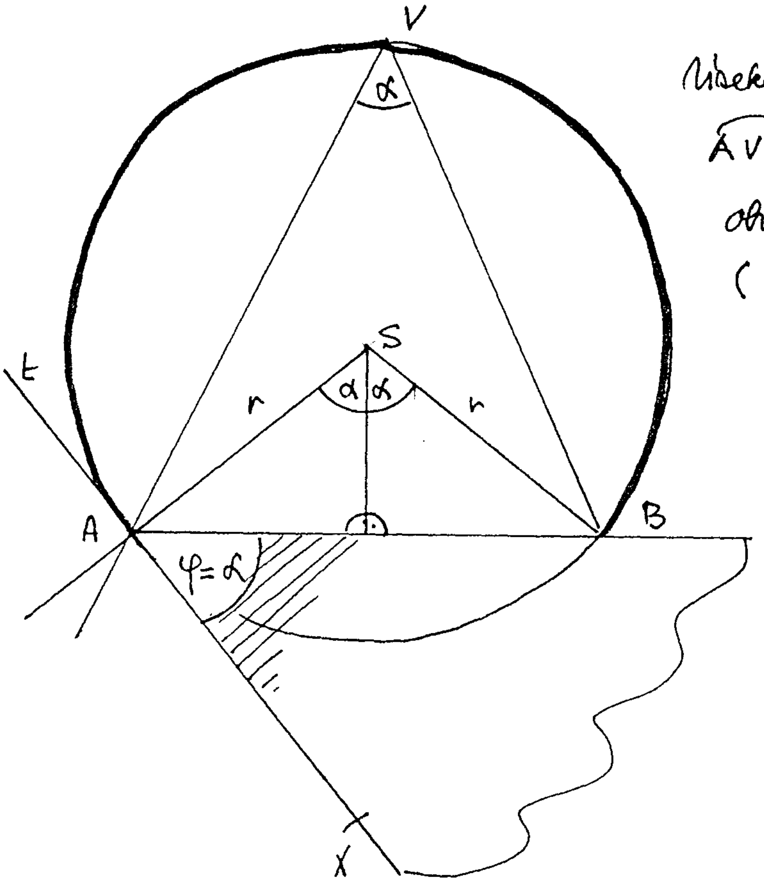
ω_1 je středový úhel příslušný menšímu oblouku $\widehat{AB}$

$\alpha_1 = \alpha_1' = \frac{\omega_1}{2}$

ω_2 přísluší kružnicovému oblouku AB (většímu)

$\alpha_2 = \frac{\omega_2}{2}$

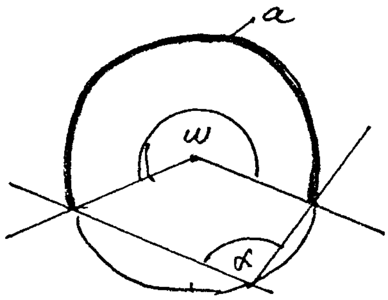
Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu.



Úsekový úhel φ příslušný k oblouku $\widehat{AVB}$ je shodný s kterýmkoli obvodovým úhlem AVB ($|\sphericalangle AVB| = \alpha$).

Příklad 1 (1.101/64-uč) pouze a)

Vypočítejte velikost obvodového úhlu příslušného k oblouku, jehož délka se rovná $\frac{3}{5}$ délky kružnice.



$$a = \frac{3}{5} \cdot 2\pi = \frac{6}{5}\pi$$

$$2\pi \ldots\ldots 360^\circ$$
$$\frac{6}{5}\pi \ldots\ldots \omega$$

$$\frac{\omega}{360} = \frac{\frac{6\pi}{5}}{\frac{2\pi}{1}}$$

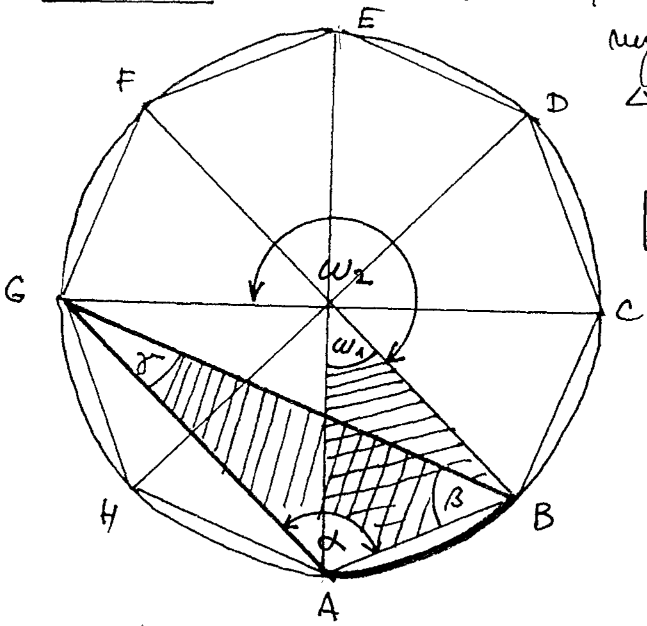
$$\frac{\omega}{360} = \frac{6\pi}{10\pi}$$

$$\frac{\omega}{360} = \frac{3}{5}$$

$$\omega = 216^\circ \qquad \left(\alpha = \frac{\omega}{2}\right)$$

$$\boxed{\alpha = 108^\circ}$$

Příklad 2 (1.102a/64-uč.): V pravidelném osmiúhelníku ABCDEFGH vypočítejte velikosti vnitřních úhlů △ABG.



$\omega_1 = 360^\circ : 8$

$\boxed{\omega_1 = 45^\circ}$

Velkému oblouku $\widehat{BG}$ přísluší středový úhel ω_2;

$\omega_2 = 5 \cdot 45^\circ$

$\boxed{\omega_2 = 225^\circ}$

α je obvodový úhel příslušný velkému oblouku $\widehat{BG}$, proto platí:

$\alpha = \frac{1}{2}\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 225^\circ = 112^\circ 30'$, $\boxed{\alpha = 112^\circ 30'}$

γ je obvodový úhel příslušný k malému oblouku $\overline{AB}$ ⇒

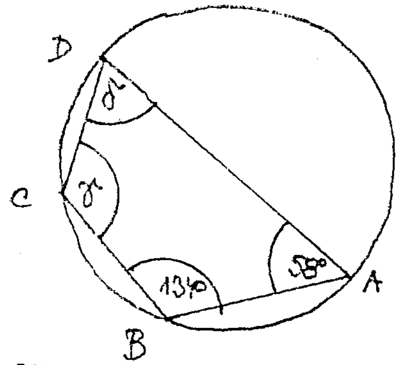
$\gamma = \frac{45^\circ}{2} = 22^\circ 30'$, $\boxed{\gamma = 22^\circ 30'}$ ω_1 je středový úhel

$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - (112^\circ 30' + 22^\circ 30')$, $\boxed{\beta = 45^\circ}$

$\boxed{\alpha = 112^\circ 30' ,\ \beta = 45^\circ ,\ \gamma = 22^\circ 30'}$

Příklad 3 (1.104/64-uč.): Vrcholy A, B, C, D čtyřúhelníka leží na kružnici; $|\sphericalangle A| = 58^\circ$, $|\sphericalangle B| = 134^\circ$. Vypočítejte velikosti zbývajících dvou vnitřních úhlů čtyřúhelníku ABCD.

Řešení: čtyřúhelník ABCD je tětivový. Pro něj platí věta:

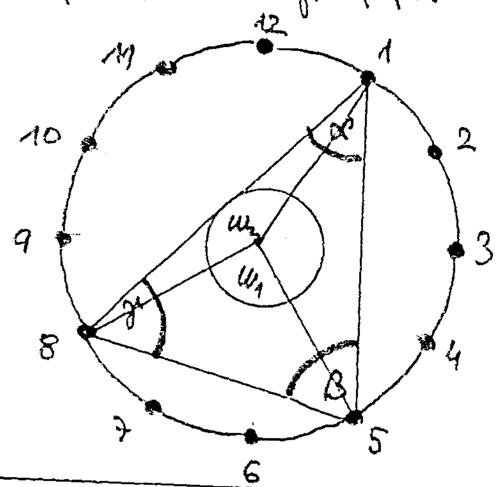


Součet velikostí dvou vnitřních protějších úhlů tětivového čtyřúhelníku je roven 180°.

$\gamma + 58^\circ = 180^\circ$ $\delta + 134^\circ = 180^\circ$

$\boxed{\gamma = 122^\circ}$ $\boxed{\delta = 46^\circ}$

Příklad 4 (1.103/64-uč.): Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka, jehož vrcholy jsou body označující na kruhovém ciferníku hodiny: 1, 5, 8.



$\omega_1 = \frac{3}{12}$ z $360^\circ = \frac{3}{12} \cdot 360^\circ = 90^\circ$, $\alpha = \frac{1}{2}\omega_1$

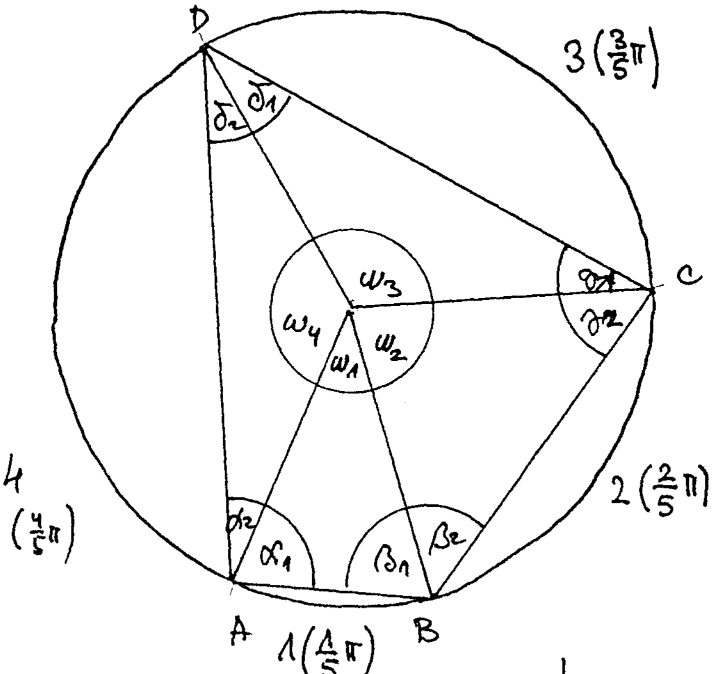
α je obv. úhel ke střed. úhlu ω_1 , $\boxed{\alpha = 45^\circ}$

$\omega_2 = \frac{5}{12}$ z $360^\circ = \frac{5}{12} \cdot 360^\circ = 150^\circ$

$\beta = \frac{1}{2}\omega_2$ … $\boxed{\beta = 75^\circ}$

$\gamma = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ$ $\boxed{\gamma = 60^\circ}$

Příklad 5 (1.105/64): Do kružnice je vepsán čtyřúhelník ABCD tak, že jeho vrcholy dělí kružnici na části - oblouky, jejichž délky jsou v poměru 1:2:3:4. Vypočítejte velikosti jeho vnitřních úhlů.



$1+2+3+4=10$ (dílů)

1 díl ... $\frac{1}{10}\cdot 2\pi = \frac{1}{5}\pi$

2 díly ... $\frac{2}{10}\cdot 2\pi = \frac{2}{5}\pi$

3 díly ... $\frac{3}{10}\cdot 2\pi = \frac{3}{5}\pi$

4 díly ... $\frac{4}{10}\cdot 2\pi = \frac{4}{5}\pi$

$360^\circ \ldots\ 2\pi$

$\omega_1 \ldots\ \frac{1}{5}\pi$

$\frac{\omega_1}{360} = \frac{\frac{1}{5}\pi}{2\pi}$

$\boxed{\omega_1 = 36^\circ}$

Když $\frac{1}{5}\pi$ přísluší 36°, tak

$\omega_2 \ldots \frac{2}{5}\pi$ " 72°

$\omega_3 = \frac{3}{5}\pi$ " 108°

$\omega_4 = \frac{4}{5}\pi$ " 144°

$\triangle ABS, BCS, CDS, DAS$ jsou rovnoramenné s rameny délky r, proto

$\alpha_1 = \beta_1 = (180^\circ - 36^\circ):2 = 72^\circ$

$\beta_2 = \gamma_2 = (180^\circ - 72^\circ):2 = 54^\circ$

$\gamma_1 = \delta_1 = (180^\circ - 108^\circ):2 = 18^\circ$

$\alpha = 72^\circ + 18^\circ = 90^\circ$, $\beta = 72^\circ + 54^\circ = 126^\circ$, $\gamma = 54^\circ + 36^\circ = 90^\circ$, $\delta = 36^\circ + 18^\circ = 54^\circ$

$\boxed{90^\circ, 126^\circ, 90^\circ, 54^\circ}$

Příklad 6 (1.107/64): $\overset{\frown}{AB}$ je menší oblouk kružnice, obvodový úhel k němu příslušný má velikost 65°. V bodech A, B jsou sestrojeny tečny kružnice, bod X je jejich průsečík. Vypočítejte $|\sphericalangle AXB|$.

Řešení (viz obr. na str. 5.)

$|\sphericalangle BSA| = 2\cdot 65^\circ = 130^\circ$

$|\sphericalangle BSA| = 360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$

$|\sphericalangle BCA| = 230^\circ : 2 = 115^\circ$

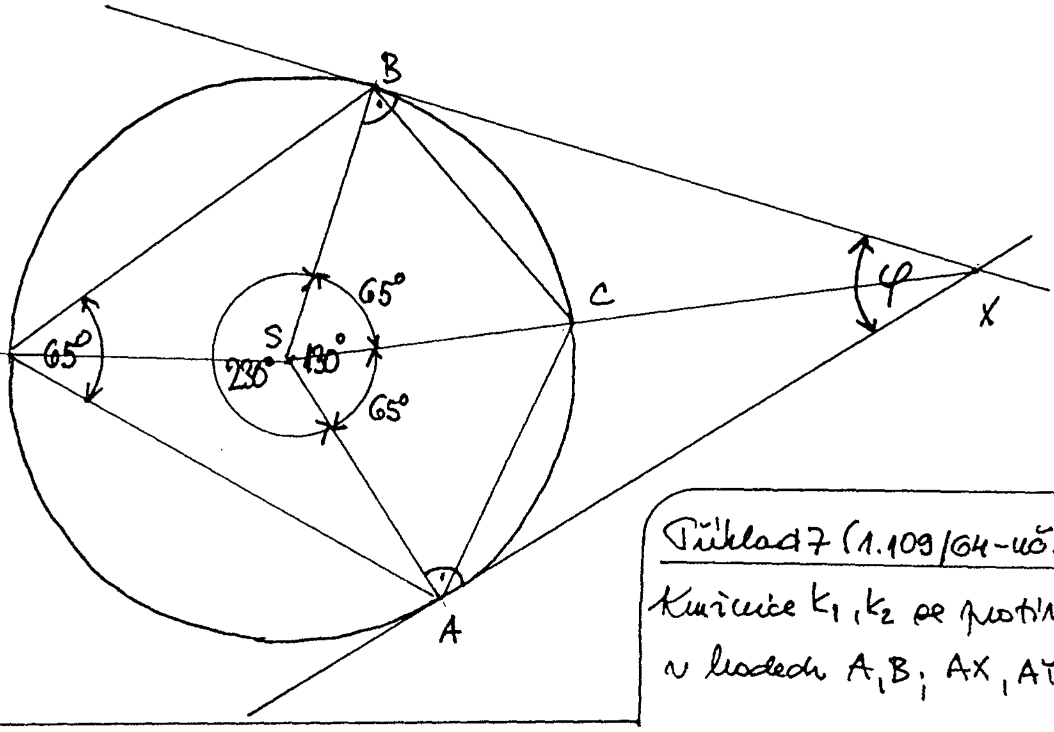
$|\sphericalangle SAX| = |\sphericalangle SBX| = 90^\circ$ (tečny)

$\triangle SAX \cong SBX$ (Ssu) $\Rightarrow$

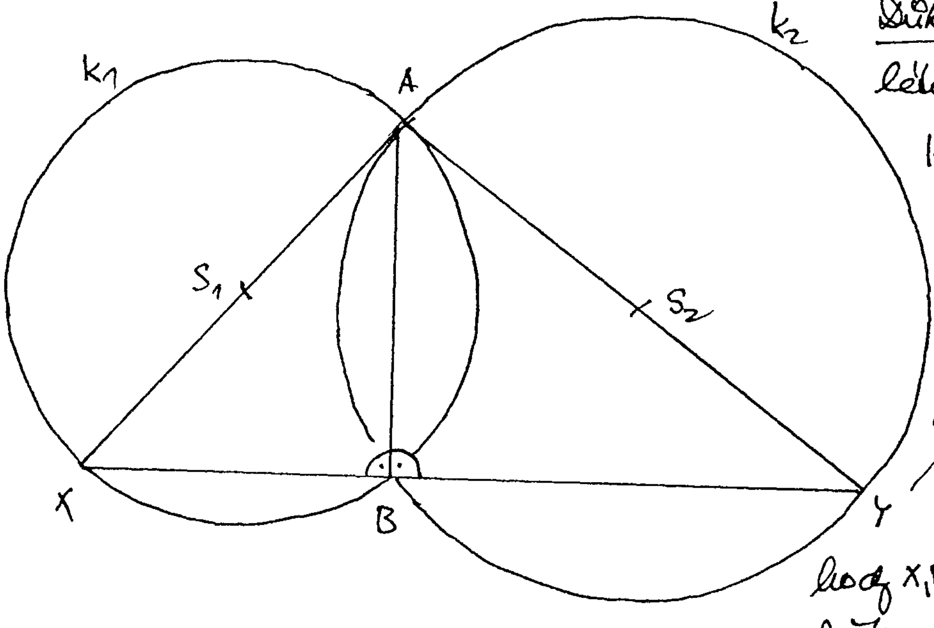
$|\sphericalangle BSC| = |\sphericalangle ASC| = 130^\circ : 2 = 65^\circ$

$\frac{\varphi}{2} = 180^\circ - 65^\circ - 90^\circ = 25^\circ$

$\varphi = 2\cdot 25^\circ = 50^\circ$ $\boxed{\varphi = 50^\circ}$



Příklad 7 (1.109/64-uč.): Kružnice k_1, k_2 se protínají v bodech A, B; AX, AY jsou jejich průměry. Dokažte, že body X, B, Y leží v přímce.



Důkaz: Podle Thaletovy věty platí:

$|\sphericalangle ABX| = 90°$

$|\sphericalangle ABY| = 90°$

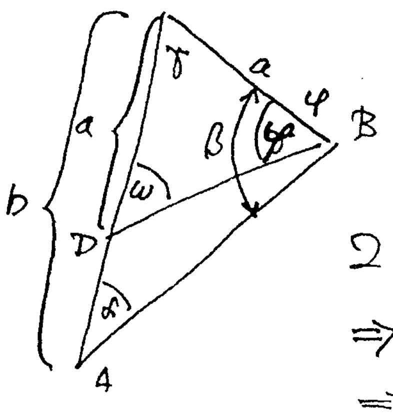
Oba úhly jsou shodné, a protože jsou vedlejší, tak jejich součet je 180°, proto body X, B, Y leží na téže přímce.

Poznámka: V mat. otázce 21 b) „Vztahy mezi goniometrickými funkcemi" na str. 3–6 najdi další práci o úhlech. Prostuduj!

29a) KONTROLA SPRÁVNOSTI ÚSUDKU. DŮKAZY (př. prof. Orb)

Další úlohy z této otázky je zpracována v materiálu otázce 17a) na sh. 10 až 15. K tomu připojuji:

Příklad 1: Proti delší straně trojúhelníku leží jeho větší vnitřní úhel.



Např. předpokládejme, že $b>a$ a že platí věta:

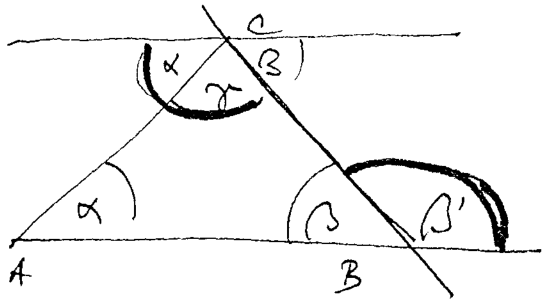
$b>a \Rightarrow \beta>\alpha$

Z $b>a \Rightarrow$ existuje $D \in AC \wedge |DC|=a \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle DBC$ je rovnoramenný $\triangle$ $(\omega=\varphi)$

$\Rightarrow \beta>\varphi=\omega>\alpha \Rightarrow \beta>\alpha$

Věta o vnějším úhlu trojúhelníka: Vnější úhel $\triangle$ je roven součtu vnitřních úhlů při nesousedních vrcholech.

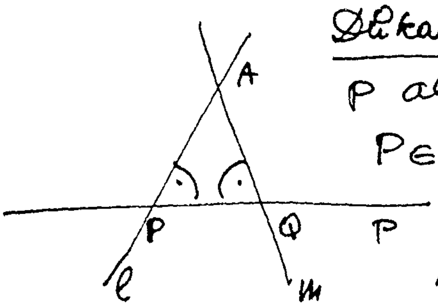


Na obr. platí (důkaz):

$\beta'=\alpha+\gamma$ (střídavé úhly)

Příklad 2: Dokažte: $\forall n\in N: 3|n^2 \Rightarrow 3|n$; důkaz je proveden v MO 17a) na sh. 13.

Příklad 3: Daným bodem A lze vést k dané přímce jedinou kolmici.



Důkaz sporem: Připusťme, že bodem A lze vést k přímce p alespoň 2 kolmice $l, m \Rightarrow$ existuje $P\in p\cap l \wedge Q\in p\cap m \Rightarrow$ existuje $\triangle PQA$, ve kterém je součet velikostí vnitřních úhlů $>180°$ ... spor s větou o součtu velikostí vnitřních úhlů $\triangle$.