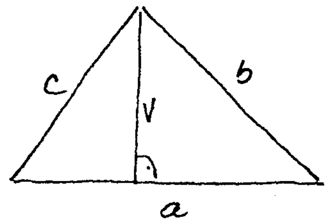
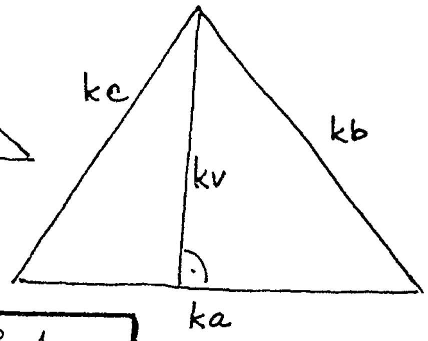
27b) OBSAH ROVINNÉHO OBRAZCE

Příklad 1 (1.112/170 - uč.): Platí: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ s poměrem podobnosti k. Co platí o poměru jejich a) obvodů, b) obsahů?





$o_1 = a + b + c$

$o_2 = ka + kb + kc$

$\boxed{o_2 = k(a+b+c)}$

$\frac{O_2}{O_1} : = \frac{k(\cancel{a+b+c})}{\cancel{a+b+c}}$

$\boxed{O_2 : O_1 = k}$

$S_1 = \frac{1}{2} av$

$S_2 = \frac{1}{2} ka \cdot kv = \boxed{k^2 \cdot \frac{1}{2} av}$

$\frac{S_2}{S_1} = \frac{k^2 \cdot \cancel{\frac{1}{2} av}}{\cancel{\frac{1}{2} av}} \rightarrow \boxed{S_2 : S_1 = k^2}$

Příklad 2 (1.113/170 - uč.). Obsahy S_1, S_2 dvou čtverců jsou v poměru 16:25. V jakém poměru jsou jejich obvody?

$\frac{S_1}{S_2} = k^2 \dots k^2 = \frac{16}{25} \rightarrow k = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ $\boxed{k = 4:5}$

Příklad 3 (1.114/170 - uč.): Určete délku a šířku obdélníku, je-li jeho obvod 38 cm a obsah 84 cm².

$o = 2(a+b)$

$2(a+b) = 38 \mid :2$

$a + b = 19$

$a = 19 - b$

$a \cdot b = 84$

$(19-b) \cdot b = 84$

$19b - b^2 = 84$

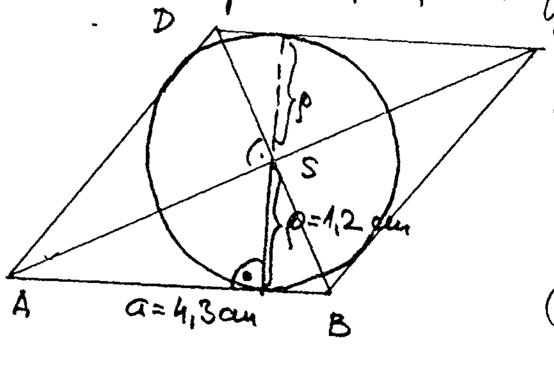
$\rightarrow b^2 - 19b + 84 = 0$

$b_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{19 \pm 5}{2} = \begin{cases} b_1 = 12 \\ b_2 = 7 \end{cases}$

$a_1 = 7, \; a_2 = 12$

Rozměry, které jsou zaměnitelné, jsou 12 cm a 7 cm.

Příklad 4 (1.115/171 - uč.): Vypočítejte obsah kosočtverce, je-li dána délka strany $a = 4{,}3$ cm a poloměr vepsané kružnice $\rho = 1{,}2$ cm.



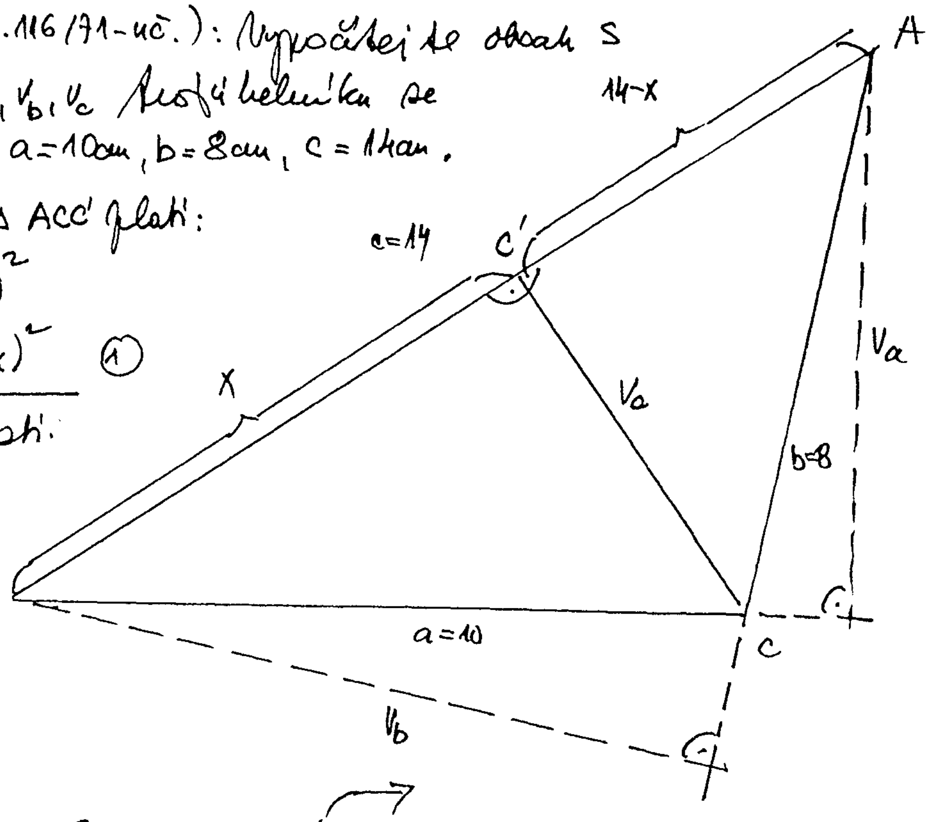
$\triangle ABC \cong \triangle CDS$ (sss)

$v = 2\rho$ $S = a \cdot v$

$S = a \cdot 2\rho = 4{,}3 \cdot 2{,}4 =$

$\boxed{S = 10{,}32 \text{ cm}^2}$

Příklad 5 (1.116/71-uč.): Vypočítejte obsah S a velikost v_a, v_b, v_c trojúhelníku se stranami: $a=10\,cm$, $b=8\,cm$, $c=14\,cm$.



Řešení: v $\triangle ACC'$ platí:

$$v_c^2 = b^2-(14-x)^2$$

$$v_c^2 = 64-(14-x)^2 \quad (1)$$

v $\triangle BCC'$ platí:

$$v_c^2 = a^2-x^2$$

$$v_c^2 = 100-x^2 \quad (2)$$

(1) = (2)

$$v_c^2 = v_c^2$$

$$64-(14-x)^2 = 100-x^2$$

$$64-(196-28x+x^2) = 100-x^2$$

$$64-196+28x-\cancel{x^2} = 100-\cancel{x^2}$$

$$28x = 232 \quad |:4$$

$$7x = 58$$

$$x = \frac{58}{7} \quad (3) \quad (\text{dej do } (2))$$

$$v_c^2 = 100-\left(\frac{58}{7}\right)^2$$

$$v_c^2 = \frac{1536}{49}$$

$$v_c = \sqrt{\frac{1536}{49}} = \frac{4\sqrt{96}}{7} = \frac{16\sqrt{6}}{7}$$

$$\boxed{v_c = \frac{16\cdot\sqrt{6}}{7}\ cm}$$

$$S_\triangle = \frac{14\cdot v_c}{2} = 7v_c = \cancel{7}\cdot\frac{16\sqrt{6}}{\cancel{7}}$$

$$\boxed{S_\triangle = 16\sqrt{6}\ cm^2}$$

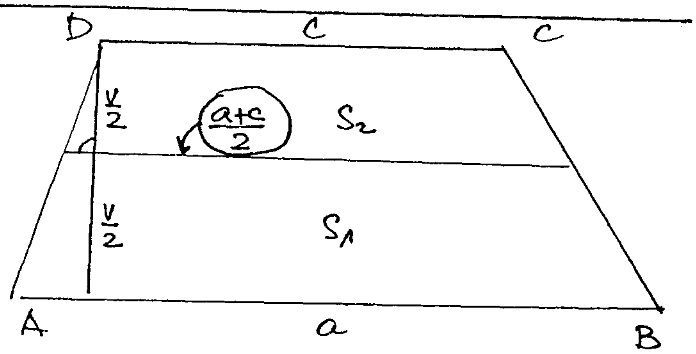
$$S_\triangle = \frac{a\cdot v_a}{2}$$

$$\boxed{v_a} = \frac{2\cdot S_\triangle}{a} = \frac{2\cdot 16\sqrt{6}}{10} = \boxed{\frac{16}{5}\sqrt{6}\ cm}$$

$$\boxed{v_b} = \frac{2\cdot S_\triangle}{b} = \frac{2\cdot 16\sqrt{6}}{8} = \boxed{4\cdot\sqrt{6}\ cm}$$

Příklad 6 (1.117/71-uč.)

Vypočítejte poměr obsahů lichoběžníků, na které rozdělí lichoběžník jeho střední příčka.



(2)

Je zřejmé, že $S_1 > S_2$

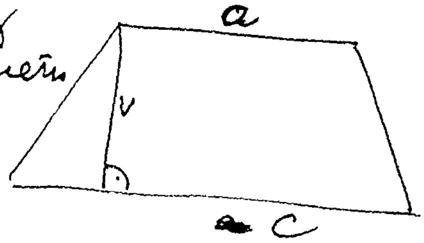
$$S_1 - S_2 = \frac{a + \frac{a+c}{2}}{2} \cdot \frac{v}{2} - \frac{\frac{a+c}{2} + c}{2} \cdot \frac{v}{2}$$

$$= \frac{\frac{2a+a+c}{2}}{\frac{2}{1}} \cdot \frac{v}{2} - \frac{\frac{a+c+2c}{2}}{\frac{2}{1}} \cdot \frac{v}{2} = \frac{3a+c}{4} \cdot \frac{v}{2} - \frac{a+3c}{4} \cdot \frac{v}{2} =$$

$$= \frac{v}{2}\left(\frac{3a+c}{4} - \frac{a+3c}{4}\right) = \frac{v}{2} \cdot \frac{3a+c-a-3c}{4} = \frac{v}{2} \cdot \frac{2a-2c}{4} = \frac{v}{2} \cdot \frac{2(a-c)}{4} =$$

$\boxed{\frac{v}{4}(a-c)}$ čtv. jednotek

Příklad 7 (1.118/71-uč.): Výšky a základny lichoběžníku jsou v postupném poměru 2 : 3 : 5, jeho obsah je 512 cm². Vypočítejte a, c, v.



$v : a : c = 2:3:5$, $v = 2x$, $a = 3x$, $c = 5x$

$$S = \frac{(a+c) \cdot v}{2} = \frac{(3x+5x) \cdot \cancel{2}x}{\cancel{2}} = (3x+5x) x = 8x^2$$

$8x^2 = 512 \quad |:8$

$x^2 = 64$

$x = 8$

$v = 2.8 = 16$, $a = 3.8 = 24$, $c = 5.8 = 40$

Zkouška: $S = \frac{(24+40).16}{2} = 512$

$v = 16$ cm, $a = 24$ cm, $c = 40$ cm

Příklad 8: Vypočítejte obsah šestiúhelníku ABCDEF, kde $v = 5$ cm (viz obr.)

Řešení: $5^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$25 = a^2 - \frac{a^2}{4}$

$25 = \frac{3a^2}{4}$

$a = \sqrt{\frac{100}{3}}$

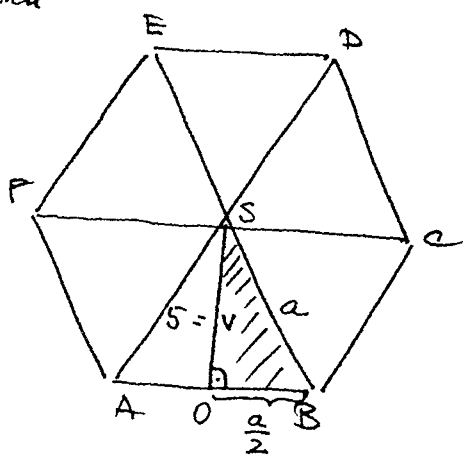
$a = \frac{10}{\sqrt{3}}$

$\boxed{a = \frac{10}{3}\sqrt{3}}$

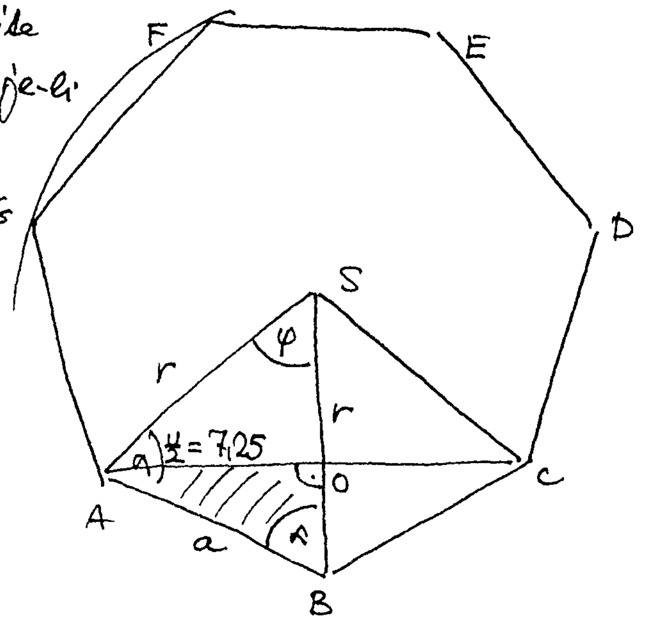
$S = 6 \cdot \frac{1}{2} a v$

$S = 3 \cdot \frac{10}{3}\sqrt{3} \cdot 5$

$\boxed{S = 50\sqrt{3}}$



Příklad 9 (1.120/71): Vypočítejte obvod pravidelného 7-úhelníku, je-li dána délka jeho nejkratší úhlopříčky $u = 14{,}5\,cm$ ($u = |AC|$)



$\triangle ABS$ je rovnoramenný (r je poloměr opsané kružnice)

v $\triangle ABS$ platí:

$2\alpha + \varphi = 180^\circ$, kde $\varphi = \frac{360^\circ}{7} = 51\frac{3}{7}^\circ$

$2\alpha = 180^\circ - \varphi$

$2\alpha = 180^\circ - 51\frac{3}{7}^\circ$

$\boxed{\alpha = 64\frac{2}{7}^\circ}$

v $\triangle ABO$ platí:

$\sin\alpha = \frac{7{,}25}{a}$

$\sin 64\frac{2}{7}^\circ = \frac{7{,}25}{a}$

$a = \frac{7{,}25}{\sin 64\frac{2}{7}^\circ} = 8{,}04689\ldots$

$o = 7 \cdot 8{,}046\ldots$

$\boxed{o \doteq 56{,}3\,cm}$

Příklad 10 (1.121/71 – uč.): Určete poloměr kruhové dráhy, kterou musí běžec proběhnout 3krát, aby uběhl 2 km!

$3 \cdot 2\pi r = 2000$

$r = \frac{2000}{6\pi}$

$\boxed{r \doteq 106{,}1\,m}$

Příklad 11 (1.122/71 – uč): Vypočítejte obvod kruhu, jehož obsah se rovná součtu obsahů tří kruhů s poloměry r_1, r_2, r_3

$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi r_3^2$

$S = \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$

hledaný kruh má poloměr r.

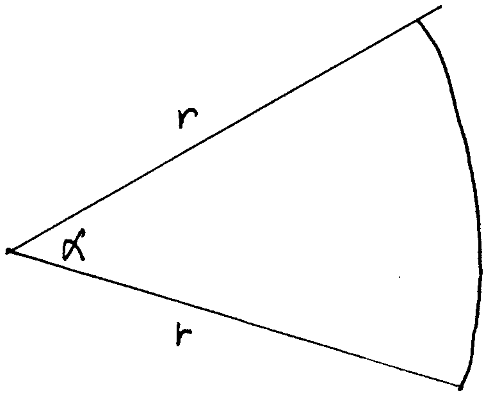
$\pi r^2 = \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$

$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$

$o = 2\pi r$

$\boxed{o = 2\pi\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}}$

Příklad 12 (1.129/72) uč.: Kruhová výseč má obvod 17 cm a obsah $17{,}5\,cm^2$. Určete její poloměr a příslušný středový úhel α.



$$a = \frac{2\pi r}{360} \cdot \alpha \qquad 2r + a = 17$$

$$\boxed{a = 17 - 2r} \quad (2)$$

$$a = \frac{\pi r}{180} \cdot \alpha$$

$$\boxed{\alpha = a \cdot \frac{180}{\pi r}} \quad (1)$$

$$\alpha = (17 - 2r) \cdot \frac{180}{\pi r}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{180(17 - 2r)}{\pi r}} \quad (3)$$

$$S = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha$$

$$17{,}5 = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha$$

$$\boxed{\alpha = \frac{6300}{\pi r^2}} \quad (4)$$

(3) = (4) čili $\alpha = \alpha$

$$\frac{(17 - 2r) \cdot 180}{\pi r} = \frac{6300}{\pi r^2} \quad \Big| \cdot \pi r$$

$$(17 - 2r) \cdot 180\, r = 6300$$

postupně $r^2 - 8{,}5r + 17{,}5 = 0$

$$r_1, r_2 = \frac{8{,}5 \pm \sqrt{2{,}25}}{2} = \frac{8{,}5 \pm 1{,}5}{2} = \begin{cases} \boxed{r_1 = 5} \\ \boxed{r_2 = 3{,}5} \end{cases}$$

Pro $r_1 = 5$ je $2r_1 + a = 17$

$$a = 17 - 10$$

$$\boxed{a_1 = 7\ \text{cm}}$$

Pro $r_2 = 3{,}5$ je $a_2 = 17 - 7$

$$\boxed{a_2 = 10\ \text{cm}}$$

$$\alpha = a_1 \cdot \frac{180}{\pi \cdot 5}$$

$$\alpha = \frac{7 \cdot 180}{5\pi}$$

$$\boxed{\alpha_1 \doteq 80°13'}$$

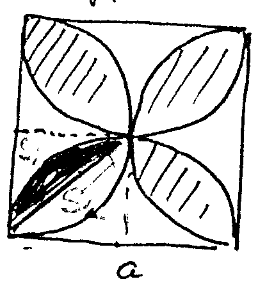
$$\alpha = a_2 \cdot \frac{180}{\pi \cdot 3{,}5}$$

$$\alpha = \frac{10 \cdot 180}{3{,}5\pi}$$

$$\boxed{\alpha_2 \doteq 163°42'}$$

Příklad 13: Vypočítejte obsah šrafovaného obrazce, který je částí čtverce se stranou a.

Obsah šrafovaného útvaru je 8krát větší než obsah černě vyznačené plochy.



$$S = 8\cdot\left[\frac{1}{4}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{8}\right] = 8\cdot\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{8}\right) = 8\cdot\left(\frac{\pi a^2}{16} - \frac{a^2}{8}\right) =$$

$$= 8\cdot\frac{\pi a^2 - 2a^2}{16} = \frac{a^2(\pi - 2)}{2} = \boxed{\frac{1}{2}a^2(\pi - 2)}$$