$2.2+z=7$ Abè do (1)

$\boxed{z=3}$ $2+0-2.3+u=-5$

$\boxed{u=-1}$

Zkouška: $L_1=2+0-2.3-1=2-6-1=-5$, $P_1=-5$, $L_1=P_1$

$L_2=2.2+2.0-3-(-1)=4-3+1=2$, $P_2=2$, $L_2=P_2$

$L_3=3.2+0+3-1=6+3-1=8$, $P_3=8$, $L_3=P_3$

$L_4=2-0+3-(-1)=2+3+1=6$, $P_4=6$, $L_4=P_4$

Řešení: $[2, 0, -1, 3]$

$[x, y, u, z]$

Slovní úlohy na soustavy rovnic

Příklad 1: Najděte dvojciferné číslo, jehož ciferný součet je 9. Jestliže toto číslo zvětšíme o 1, získáme 4-násobek čísla zapsaného pomocí číslice stojící na místě jednotek.

Řešení: Dvojciferné číslo lze zapsat $10a+b$, kde $a \in \{1,2,3,\dots,8,9\}$, $b \in \{0,1,2,\dots,8,9\}$. Platí:

$\boxed{a+b=9}$

$10a+b+1=4b$ – Řešíme jako soustavu rovnic.

$\boxed{10a-3b=-1}$

$a+b=9 \quad |\cdot 3$

$10a-3b=-1$

$3a+3b=27$

$10a-3b=-1$

$13a=26 \quad |:13$

$\boxed{a=2}$ $2+b=9 \Rightarrow \boxed{b=7}$

Zkouška: $2+7=9$

$27+1=28$ $4.7=28$

Hledané číslo je 27.

Příklad 2 (8/29 OA): Součet i podíl dvou čísel je 10. Která jsou to čísla.

Řešení:

$x+y=10$

$\frac{x}{y}=10$

$x=10-y$

$\frac{10-y}{y}=10 \quad |\cdot y$

$10-y=10y$

$11y=10$

$\boxed{y=\frac{10}{11}}$

$x=10-\frac{10}{11}$

$\boxed{x=\frac{100}{11}}$

Zkouška: $\frac{10}{11}+\frac{100}{11}=10$; $\frac{100}{11}:\frac{10}{11}=10$

Hledaná čísla jsou $\frac{100}{11}$ a $\frac{10}{11}$.

Příklad 3 (9/129 OA): Dvě čísla jsou v poměru 3:4. Zvětší-li se první o 4 a druhé se o 4 zmenší, je výsledný poměr 5:2. Která čísla to jsou?

Řešení:

$\frac{x}{y}=\frac{3}{4} \quad |\cdot 4y$

$\frac{x+4}{y-4}=\frac{5}{2} \quad |\cdot 2(y-2)$

$4x=3y$

$\boxed{4x-3y=0}$

$2(x+4)=5(y-4)$

$2x+8=5y-20$

$\boxed{2x-5y=-28}$

upravená soustava

$4x-3y=0$

$2x-5y=-28 \quad |\cdot(-2)$

$4x-3y=0$

$-4x+10y=56$

$7y=56 \Rightarrow \boxed{y=8}$

$4x-3.8=0$

$4x=24 \Rightarrow \boxed{x=6}$

Zkoušku samostatně.

Jsou to čísla 6 a 8.

Příklad 4 (10/129 OA): Dva stroje mají různý výkon. Pracuje-li první 6 h a druhý 4 h, vyrobí dohromady 340 výrobků. Pracuje-li první 4 h a druhý 6 h, vyrobí 360 výrobků. Určete hodinový výkon každého ze strojů.

Řešení: výkon 1. stroje za 1 h ... x výrobků

" 2. " " ... y "

Platí:

$6x+4y=340$

$4x+6y=360$

Vyřešit samostatně

z toho: $x=30$, $y=40$

Výsledek: 1. stroj vyrobí 30 výrobků za 1 h, 2. stroj 40 výrobků.

Příklad 5 (11/129 OA): Dva pracovníci A a B dostali za společnou práci 3100 Kč. Pracovník A pracoval 4 dny a pracovník B 7 dní. Pracovník B si za 3 dny vydělal o 100 Kč méně než pracovník A za 4 dny. Vypočítejte denní mzdu každého pracovníka.

Řešení: Denní mzda prac. A ... x Kč

" " " B ... y Kč

Platí:

$4x+7y=3100$

$3y+100=4x$

z toho lze vypočítat $x=250$ (Kč), $y=300$ (Kč)

Denní mzda pracovníka A je 250 Kč a pracovníka B 300 Kč.

Příklad 6 (12/290A): Dva prameny dávají za 15 minut 600 l vody. První dá za 8 minut o 30 l méně než druhý za 6 minut. Kolik vydá každý z pramenů za 1 minutu?

Řešení: 1. pramen za 1 min ... x l vody
2. " " " ... y l "
Společně " " $(x+y)$ l "

$(x+y) \cdot 15 = 600$ Řešení této soustavy je $x = 15$, $y = 25$.
$8x + 30 = 6y$ 1. pramen vydá za 1 min 15 l vody, 2. 25 l vody.

Příklad 7 (14/290A): Z místa A do místa B vzdáleného 50 km pluje po řece po proudu člun 2 h, proti proudu 3 h 20 min. Jaká je rychlost proudu a rychlost člunu?

Řešení: Rychlost člunu x km/h
" proudu y km/h

1 h 20 min $= 1\frac{1}{3}$ h $= \frac{10}{3}$ h

$$\left.\begin{aligned}(x+y) \cdot 2 &= 50\\ (x-y) \cdot \tfrac{10}{3} &= 50\end{aligned}\right\}$$ z toho lze vypočítat $\underbrace{x = 20 \text{ km/h}}_{\text{rychlost člunu}}$, $\underbrace{y = 5 \text{ km/h}}_{\text{rychlost proudu}}$

Příklad 8 (17/300A): Dvěma kohouty by bazén natekl za 12 dní. Po 8 dnech byl první kohout zastaven a druhým bazén dotekl za 7 dní. Za kolik dní by natekl bazén každým z kohoutů jednotlivě?

Řešení:
1. kohoutem se naplní bazén za x dní, za 1 den $\frac{1}{x}$ bazénu
2. " " " " " y " " " $\frac{1}{y}$ "

Společně za 1 den $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ bazénu. Platí:

$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \cdot 12 = 1$
$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \cdot 8 + 7 \cdot \frac{1}{y} = 1$

Substituce: $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{y} = b$

$(a+b) \cdot 12 = 1$ $\Rightarrow a+b = \frac{1}{12}$, dosadit do 2. rovnice
$(a+b) \cdot 8 + 7b = 1$

$\frac{1}{12} \cdot 8 + 7b = 1$ $a + \frac{1}{21} = \frac{1}{12}$

$\underbrace{\boxed{b = \frac{1}{21}} \quad \boxed{a = \frac{1}{28}}}_{\text{zpět do sub. vyřešit}}$

$\frac{1}{x} = \frac{1}{28}$ $\qquad$ $\frac{1}{y} = \frac{1}{21}$ $\qquad$ 1. kohoutem nateče bazén za 28 dnů.

$\boxed{x = 28}$ $\qquad$ $\boxed{y = 21}$ $\qquad$ 2. " " " " 21 dnů.

Příklad 9 (18/30 OA) JE NA SOUSTAVU 3 ROVNIC (I DALŠÍ)

Číslo 100 rozdělte na 3 části tak, aby se 40% první části rovnalo 60% druhé části a třetí část se rovnala součtu první a druhé části.

$$\underbrace{x \mid y \mid z}_{100}$$

$\boxed{x + y + z = 100}$

$40\%\, x = 60\%\, y$

$0{,}4x = 0{,}6y \quad | \cdot 10$

$4x = 6y$

$\boxed{4x - 6y = 0}$

$z = x + y$

$\boxed{x + y - z = 0}$

$x + y + z = 100$
$x + y - z = 0$ } sečteme

$4x - 6y = 0$

$2x + 2y = 100 \quad | \cdot (-2)$
$4x - 6y = 0$

$-4x - 4y = -200$
$4x - 6y = 0$

$-10y = -200$

$\boxed{y = 20}$

$4x - 6 \cdot 20 = 0$

$4x = 120$

$\boxed{x = 30}$

$\boxed{z = 50}$

Číslo 100 rozdělíme na 30, 20, 50.

Příklad 10 (z jiných sbírek)

Tři traktoristé zorali celkem 117 ha polí. Druhý traktorista zoral o 12 ha polí více než první. Třetí 1,5krát tolik jako první. Kolik ha polí zoral každý z nich?

Řešení:

1. tr.... x ha
2. tr.... y ha
3. tr.... z ha

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 117 \\ y &= x + 12 \\ z &= 1{,}5x \end{aligned}\right\}$$

z toho lze vypočítat: $x = 30$ (ha), $y = 42$ (ha), $z = 45$ (ha)

Příklad 11: Zvětšíme-li hranu a kvádru o 1 cm (při zachování b, c), zvětší se jeho povrch o 54 cm². Zvětšíme-li hranu b o 2 cm (a, c ne), zvětší se jeho povrch o 96 cm². Zvětšíme-li c o 3 cm (a, b ne), zvětší se jeho povrch o 126 cm². Vypočítejte objem původního kvádru.

__Řešení:__ $$S = 2\underset{\substack{| \\ a+1}}{a}b + 2\underset{\substack{| \\ a+1}}{a}c + 2bc$$

$$2(a+1).b + 2(a+1).c + \cancel{2bc} = 2ab + 2ac + \cancel{2bc} + 54 \text{, po úpravě}$$

$$\boxed{b+c = 27}$$

$$S = 2a\underset{\substack{| \\ b+2}}{b} + 2ac + 2\underset{\substack{| \\ (b+2)}}{b}c$$

$$2a(b+2) + \cancel{2ac} + 2(b+2).c = 2ab + \cancel{2ac} + 2bc + 96 \text{, po úpravě}$$

$$\boxed{a+c = 24}$$

$$S = 2ab + 2a\underset{\substack{| \\ c+3}}{c} + 2b\underset{\substack{| \\ c+3}}{c}$$

$$\cancel{2ab} + 2a(c+3) + 2b(c+3) = 2ab + 2ac + \cancel{2bc} + 126$$

$$\boxed{a+b = 21}$$

$$\left.\begin{aligned} b+c &= 27 \\ a+c &= 24 \\ a+b &= 21 \end{aligned}\right\}$$ Řešením této soustavy je $a = 9$, $b = 12$, $c = 15$

$V = abc$

$V = 9.12.15$

$$\boxed{V = 1620\ cm^3}$$

__Příklad 12__ NA SOUSTAVU 4 ROVNIC

Čtyři bratři mají dohromady 335 Kč. Každý z nich, kromě nejmladšího, má o 7 Kč méně, než mají všichni jeho mladší sourozenci dohromady. Kolik korun má každý z těchto chlapců?

__Řešení:__ Označme bratry seřazené od nejmladšího k nejstaršímu A, B, C, D a jejich fin. částky po řadě $\underline{a}$ Kč, $\underline{b}$ Kč, $\underline{c}$ Kč, $\underline{d}$ Kč. Platí:

$$\left.\begin{aligned} a+b+c+d &= 335 \\ a+b+c-7 &= d \\ a+b-7 &= c \\ a-7 &= b \end{aligned}\right\}$$ Řešením je: $a = 48$ Kč, $b = 41$ Kč, $c = 82$ Kč, $d = 164$ Kč.

Grafické řešení soustav dvou lin. rovnic se dvěma neznámými

Příklad 1: Řešte soustavy rovnic:

a) $3x-2y=12$
$4x+y=5$

b) $x-0{,}5y=-1{,}5$
$5x-2{,}5y=10$

c) $-6x+2y=5$
$9x-3y=-7{,}5$

Řešení: Každou rovnici dané soustavy upravíme na tvar $y=ax+b$ (směrnicový tvar). Získané rovnice budou představovat funkce f_1, f_2.

Určíme souřadnice dvou bodů grafu f_1, f_2 atd.

a) $3x-2y=12$ $\quad\boxed{y=1{,}5x-6}$

x	0	4
y	-6	0

$4x+y=5$ $\quad\boxed{y=-4x+5}$

x	0	1
y	5	1

b) $x-0{,}5y=-1{,}5$ $\quad\boxed{y=2x+3}$

x	0	1
y	3	5

$5x-2{,}5y=10$ $\quad\boxed{y=2x-4}$

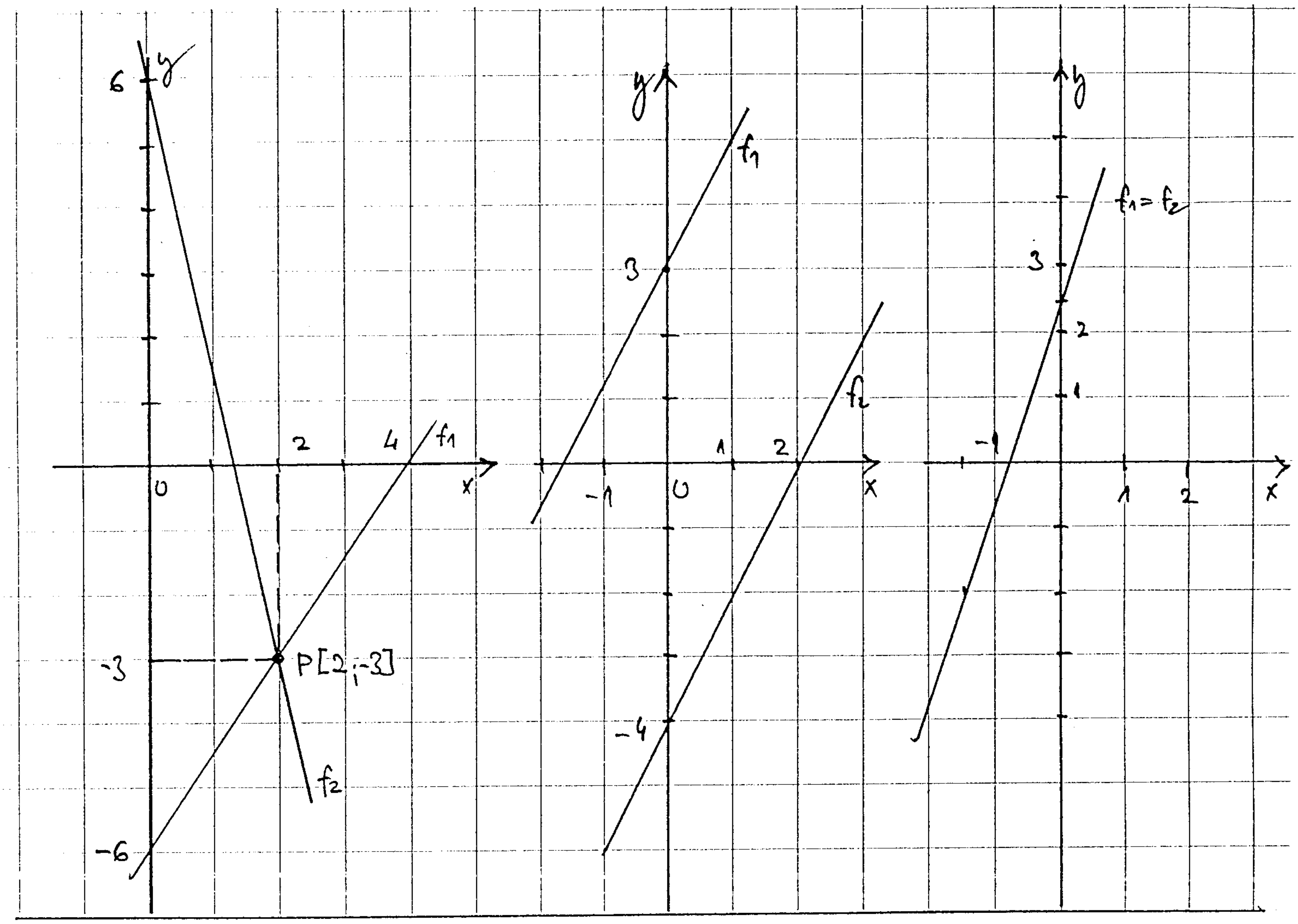
x	0	2
y	-4	0

c) $-6x+2y=5$ $\quad\boxed{y=3x+2{,}5}$

$9x-3y=-7{,}5$ $\quad\boxed{y=3x+2}$

x	0	-1,5
y	2,5	2

Výsledek (viz grafy) a) $x=2,\ y=-3$, $P[2,-3]$.. 1 řešení
b) žádné řešení
c) nekonečně mnoho řešení



Soustava lineární a kvadrat. rovnice

Příklad 1: Vypočtěte souřadnice průsečíku přímky $y=2x+3$ paraboly $y=x^2$.

Řešení: Postupujeme tak, že x z lin. rovnice dosadíme do kvadratické

$$y = x^2$$
$$y = 2x+3$$
$$x^2 = 2x+3$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{2\pm4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 3^2 \\ y_1 &= 9 \end{aligned}\right\} P[3;9]$$

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= (-1)^2 \\ y_2 &= 1 \end{aligned}\right\} Q[-1;1]$$

Soustava rovnic má dvě řešení $[-1; 1], [3; 9]$.