Lineární rovnice s parametry

Někdy řešíme úlohy, jejichž zadání je téměř stejné, liší se pouze některými údaji.

Příklad 22:

Obdélníkový pozemek má délku
- a) o 20 m
- b) o 28 m
- c) o 25 m

větší než šířku. Kdyby se délka pozemku zmenšila o 5 m a šířka zvětšila o 10 m, zvětšila by se jeho výměra o 300 m^2. Určete rozměry pozemku.

Řešení:

$$\boxed{\begin{array}{l} S_1 = x\cdot(x+20) \\ S_2 = x\cdot(x+28) \\ S_3 = x\cdot(x+25) \end{array}} \quad x$$

a) $x+20 \quad \ldots (x+20-5) \ldots (x+10)$

b) $x+28 \quad \ldots (x+28-5) \ldots (x+10)$

c) $x+25 \quad \ldots (x+25-5) \ldots (x+10)$

Platí:

a) $(x+10)\cdot(x+20-5) = x\cdot(x+20)+300$

b) $(x+10)\cdot(x+28-5) = x\cdot(x+28)+300$

c) $(x+10)\cdot(x+25-5) = x\cdot(x+25)+300$

Označme 20, 28, 25 proměnnou d.

Zobecněme:

$$\underbrace{(x+10)\cdot(x+d-5) = x\cdot(x+d)}$$

je rovnice s parametrem d a neznámou x.

Dosadíme-li do této rovnice $d=20$, $d=28$ a $d=25$ dostaneme řešení úlohy a), b), c).

Rovnice s parametry jsme již poznali, např. lineární rovnice $ax+b=0$, kde $a, b \in R$, je rovnice s neznámou x a se dvěma parametry a, b. Rovnice $ax^2+bx+c=0$ má neznámou x a tři parametry a, b, c.

> Rovnice s parametry je taková rovnice, v níž se vyskytují vedle neznámé ještě další proměnné (parametry). Řešíme ji stejnými postupy jako běžné rovnice. Kořeny rovnice s parametry jsou však závislé na volbě parametrů, proto provádíme diskusi řešení rovnice vzhledem k parametrům.

Při ní určíme, pro které hodnoty parametru nemá rovnice smysl, má konečný počet řešení, má nekonečně mnoho řešení, popř. nemá žádné řešení.

Rovnice s jedním parametrem

Příklad 23: Řešte rovnici $p(2-p)\cdot x = 4p$ s neznámou x a parametrem $p \in R$.

Řešení: $p(2-p)\cdot x = 4p$

1) Je-li $p\cdot(2-p) \neq 0$, pak platí $\boxed{p \neq 0} \wedge 2-p \neq 0$

$$\boxed{p \neq 2}$$

S podmínkou, že $p \neq 0 \wedge p \neq 2$ rovnici vyřešíme:

$$p(2-p)\cdot x = 4p \quad | : p(2-p)$$

$$x = \frac{4p}{p(2-p)} = \boxed{\frac{4}{2-p}}$$ Daná rovnice má 1 řešení.

---

2) Je-li $p(2-p) = 0$, pak platí $\boxed{p = 0} \vee 2-p = 0$

$$\boxed{p = 2}$$

S podmínkou, že $p = 0$ dostáváme:

$$p\cdot(2-p)\cdot x = 4p$$
$$0\cdot(2-0)\cdot x = 4\cdot 0$$
$$\boxed{0\cdot x = 0}$$ ∞ mnoho řešení, čili řešením je každé $x \in R$.

S podmínkou, že $p = 2$ dostáváme:

$$p(2-p)\cdot x = 4\cdot p$$
$$2\cdot(2-2)\cdot x = 4\cdot 2$$
$$\boxed{0\cdot x = 8}$$ rovnice nemá řešení

Získané výsledky můžeme přehledně zapsat do tabulky.

p	Řešení
$p=0$	$x \in R$
$p=2$	$x \neq 0, x \in \emptyset$
$p \notin \{0;2\}$	$x \in \left\{\frac{4}{2-p}\right\}$

Příklad 24: Řešte následující rovnici s parametrem a a neznámou x.

$$x+1-\frac{2x+a+1}{a}=\frac{a-x}{a}$$

1) Pro $a=0$ je $\boxed{x=\emptyset.}$

2) Pro $\underbrace{a\neq 0}_{(*)}$ rovnici upravíme: $x+1-\frac{2x+a+1}{a}=\frac{a-x}{a} \quad |\cdot a$

$$a(x+1)-(2x+a+1)=a-x$$
$$ax+\cancel{a}-2x-a-1=\cancel{a}-x$$
$$ax-x=a+1$$
$$x(a-1)=a+1$$

3) S podmínkou, že $a-1\neq 0$ $\boxed{a\neq 1}$ dostáváme

$x\cdot(a-1)=a+1)$

$\boxed{x=\frac{a+1}{a-1}}$ 1 řešení

S předchozí podmínkou $a\neq 0$ $(*)$ a s novou podmínkou $a\neq 1$ má úloha 1 řešení $x=\frac{a+1}{a-1}$.

4) S podmínkou, že $a-1=0$ $a=1$ dostáváme:

$x(a-1)=a+1$

$x(1-1)=1+1$

$0.x=2 \Rightarrow x\in\emptyset$, nebo $x=\emptyset$

a	Řešení
$a=0$	$x\in\emptyset$
$a\neq 0;1$	$x=\frac{a+1}{a-1}$
$a\pm 0;1$	$x\in\emptyset$

Následující rovnice s jedním parametrem jsou ze sbírky úloh pro obch. akademie ze str. 25.

Příklad 25: a) $ax+5=3x$

$ax-3x=-5$

$x(a-3)=-5$

→ Pro $a-3=0$, čili $a=3$ dostáváme:

$x(a-3)=-5$

$x(3-3)=-5$

$0.x=-5$; $x\in\emptyset$ (rovnice nemá řešení)

Pro $a-3 \neq 0$, čili $a \neq 3$ dostáváme:

$x(a-3) = -5 \quad | : (a-3)$

$x = \frac{-5}{a-3} = \boxed{\frac{5}{3-a}}$ 1 řešení

a	Řešení
$a=3$	$x \in \emptyset$
$a \neq 3$	$x = \frac{5}{3-a}$

---

b) $\frac{x-2a}{x+2} - 3 = 2a \quad | \cdot (x+2)$ s podmínkou $\boxed{x \neq -2}$

$x - 2a - 3(x+2) = 2a(x+2)$

$x - 2a - 3x - 6 = 2ax + 4a$

$-2x - 2ax = 6a + 6 \quad | : (-2)$

$x + ax = -3a - 3$

$x(1+a) = -3a - 3$

1) S podmínkou $1+a=0$, čili $\boxed{a=-1}$ dostáváme

$x(1+a) = -3a - 3$

$x(1-1) = -3 \cdot (-1) - 3$

$\boxed{0x = 0}$ řešením je každé $x \in R - \{-2\}$

2) S podmínkou $1+a \neq 0$, čili $\boxed{a \neq -1}$ dostáváme:

$x(1+a) = -3a - 3$

$x = \frac{-3a-3}{a+1} = \frac{-3(a+1)}{a+1} = \boxed{-3}$

a	Řešení
$a=-1$	$x \in R - \{-2\}$
$a \neq -1$	$x = -3$

---

c) $x - \frac{2}{a^2} = \frac{1}{a^2}(4x+a) \quad | : a^2$ s podmínkou, že $\boxed{a \neq 0}$ dostáváme

$a^2x - 2 = 4x + a$

$a^2x - 4x = a + 2$

$x(a^2-4) = a + 2$

1) S podmínkou, že $\rightarrow$ $a^2 - 4 = 0$

$(a+2) \cdot (a-2) = 0$

$(a+2=0) \vee (a-2=0)$

$\underbrace{a=-2 \vee a=2}_{a=\pm 2}$

$a=2$ dostáváme:

$x(2^2-4) = 2+2$

$0 \cdot x = 4 \Rightarrow x \in \emptyset$ (žádné řešení)

2) S podmínkou, že $a=-2$ dosadíme:

$x(a^2-4)=a+2$

$x[(-2)^2-4]=-2+2$

$0.x=0$, řešením je každé $x \in R-\{0\}$

3) S podmínkou, že $a^2-4 \neq 0$

$a^2 \neq 4$

$a \neq \pm\sqrt{4} \dots a \neq \pm 2$ dosadíme:

$x(a^2-4)=a+2 \quad |:(a^2-4)$

$$x=\frac{a+2}{a^2-4}=\frac{a+2}{(a+2)\cdot(a-2)}=\boxed{\frac{1}{a-2}}$$

a	Řešení
$a\neq 0$, $a=2$	$x \in \emptyset$
$a \neq 0$, $a=-2$	$x \in R$ (každé reálné číslo)
$a \neq 0$, $a \neq \pm 2$	$x=\frac{1}{a-2}$

d) $a(2x+1)=4(x+3)$

$2ax+a=4x+12$

$2ax-4x=12-a$

$x(2a-4)=12-a$

Pro $2a-4=0$

$2a=4$, $\boxed{a=2}$ dosadíme

$x(2.2-4)=12-2$

$0x=10$, $\boxed{x\in\emptyset}$

Pro $2a-4\neq 0 \dots \boxed{a\neq 2}$ platí:

$x(2a-4)=12-a$

$$x=\frac{12-a}{2a-4}=\boxed{\frac{12-a}{2(a-2)}}$$

a	Řešení
$a=2$	$x\in\emptyset$
$a\neq 2$	$x=\frac{12-a}{2(a-2)}$

e) $\frac{x}{a-1}-\frac{2-x}{a}=1 \quad |.a(a-1)$ s podmínkou

$ax-(2-x)\cdot(a-1)=a(a-1)$ $\quad a\neq 0 \vee a-1\neq 0$

$ax-(2a-ax-2+x)=a^2-a$ $\quad \boxed{a\neq 0 \vee \; a\neq 1}$

$ax-2a+ax+2-x=a^2-a$

$2ax-x=a^2+a-2$

$x(2a-1)=a^2+a-2$

Pro $2a-1=0$, čili $2a=1 \dots \boxed{a=\frac{1}{2}}$

dosadíme:

$x\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-2$

$0.x=-\frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{x\in\emptyset}$

Pro $a\neq\frac{1}{2}$ dosadíme

$x(2a-1)=a^2+a-2 \quad |:(2a-1)$

$x=\frac{a^2+a-2}{2a-1}$ → Toto je kvadratický trojčlen.

$a^2 - a - 2 = 0$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$a^2 - a - 2 = (a-1)\cdot(a+2)$

$$x = \frac{(a-1)\cdot(a+2)}{2a-1}$$

a	Řešení
$a \neq 0,\ a \neq 1,\ a \neq \frac{1}{2}$	$x = \frac{(a-1)\cdot(a+2)}{2a-1}$
$a \neq 0,\ a \neq 1,\ a = \frac{1}{2}$	$x \in \emptyset$

Příklady z jiných zdrojů než je sbírka úloh pro OA.

Příklad 26: Řešte rovnici s parametrem k a neznámou x.

$$\frac{kx+1}{x-2} = \frac{kx-1}{x+2} \quad \Big| \ (x-2)\cdot(x+2) \text{ s podmínkou } \boxed{x \neq \pm 2}$$

$(kx+1)\cdot(x+2) = (kx-1)\cdot(x-2)$

$\cancel{kx^2} + x + 2kx + 2 = \cancel{kx^2} - x - 2kx + 2$

$2x + 4kx = 0 \quad | : 2$

$x + 2kx = 0$

$x(1+2k) = 0$

Pro $1 + 2k = 0$

$2k = -1$

$\boxed{k = -\frac{1}{2}}$ dosadíme

$x\left[1 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 0$

$0x = 0 \ ; \ \boxed{x \in R - \{-2; +2\}}$

Pro $\boxed{k \neq -\frac{1}{2}}$ platí:

$x\ (1+2k) = 0$

$\boxed{x = 0}$

k	Řešení
$k = -\frac{1}{2}$	$x \in R - \{-2; 2\}$
$k \neq -\frac{1}{2}$	$x = 0$

Příklad 27:

$ax^2 + (a-1)x - 1 = 0$

1) Je-li $\boxed{a=0}$, pak $0x^2 + (0-1)x - 1 = 0$

$-x - 1 = 0$ je lineární rovnice

$\boxed{x = -1}$

2) Je-li $a \neq 0$, je daná rovnice kvadratická. Pro její diskriminant D platí: $D = (a-1)^2 + 4a = a^2 - 2a + 1 + 4a = a^2 + 2a + 1 = \underline{(a+1)^2}$

Tento D je vždy nezáporný.

I.) Je-li $a=-1$, je $D=(-1+1)^2=0^2=0$

Pro $\boxed{a=-1}$, má rovnice jediný (dvojnásobný) kořen. Rovnice má tvar: $-1x^2+(-1-1)x-1=0$

$$-x^2-2x-1=0 \quad |\cdot(-1)$$

$$x^2+2x+1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\frac{-2\pm0}{2}=-1$$

$$\boxed{x=-1}$$

II.) Pro $a\neq0$, $a\neq-1$ má daná rovnice 2 kořeny.

$$ax^2+(a-1)x-1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-(a-1)\pm\sqrt{(a+1)^2}}{2a}=\frac{1-a\pm|a+1|}{2a}$$

Pro $(a+1)\geq0$ je $|a+1|=a+1$ a platí:

$$x_{1,2}=\frac{1-a\pm(a+1)}{2a}= \begin{cases} \frac{1-a+a+1}{2a}=\frac{2}{2a}=\frac{1}{a} \\ \frac{1-a-a-1}{2a}=\frac{-2a}{2a}=-1 \end{cases}$$

Pro $(a+1)<0$ je $|a+1|=-a-1$

$$x_{1,2}=\frac{1-a\pm(-a-1)}{2a}= \begin{cases} \frac{1-a-a-1}{2a}=\frac{-2a}{2a}=-1 \\ \frac{1-a+a+1}{2a}=\frac{2}{2a}=\frac{1}{a} \end{cases}$$

a	Řešení
$a=0$	$x=-1$
$a\neq0$, $a=-1$	$x=-1$
$a\neq0$, $a\neq-1$	$x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{a}$

Příklad 28:

a) $\frac{x-a}{x+1}=a+3 \quad |\cdot(x+1)$ s podmínkou $\boxed{x\neq-1}$

$$x-a=(a+3)\cdot(x+1)$$

$x - a = ax + 3x + a + 3$

$-2x - ax = 2a + 3 \quad |\cdot(-1)$

$2x + ax = -2a - 3$

$x(2+a) = -2a - 3$

Je-li $2+a=0$

$\boxed{a=-2}$ dostáváme

$x(2-2) = -2\cdot(-2) - 3$

$\boxed{0x = 1} \Rightarrow \boxed{x \in \emptyset}$

je-li $2+a \neq 0$ rovnici upravíme

$\boxed{a \neq -2}$

$x = \boxed{-\dfrac{2a+3}{a+2}}$

a	Řešení
$a=-2$	$x \in \emptyset$
$a \neq -2$	$x = -\dfrac{2a+3}{a+2}$

---

b) $\dfrac{x+a}{a} = ax - 1 \quad |\cdot a$ s podmínkou $\boxed{a \neq 0}$

$x + a = a^2x - a$

$x - a^2x = -2a$

$x(1-a^2) = -2a$

$x\cdot(1-a)\cdot(1+a) = -2a$

Je-li $(1-a)\cdot(1+a)=0$, pak platí: $(1-a=0) \vee (1+a=0)$

$\underbrace{a=1 \;\vee\; a=-1}$

$\boxed{a=\pm 1}$

a dostáváme

pro $a=1$

$x(1-1)\cdot(1+1) = -2\cdot 1$

$\boxed{0x = -2} \Rightarrow \boxed{x \in \emptyset}$

Pro $a=-1$

$x[1-(-1)]\cdot(1-1) = -2\cdot(-1)$

$2\cdot 0x = +2$

$\boxed{0x = 2} \Rightarrow \boxed{x \in \emptyset}$

Je-li $\underbrace{1-a \neq 0 \;\vee\; 1+a \neq 0}$

$\boxed{a \neq \pm 1}$

a dostáváme

$x = -\dfrac{2a}{1-a^2} = \dfrac{2a}{a^2-1}$

$\boxed{x = \dfrac{2a}{a^2-1}}$

a	Řešení
$a=0$	$x \in \emptyset$
$a \neq 0,\ a = \pm 1$	$x \in \emptyset$
$a \neq 0,\ a \neq \pm 1$	$x = \dfrac{2a}{a^2-1}$

---

c) $\dfrac{2x+p^2}{p+3} + \dfrac{2x-p^2}{p-3} = \dfrac{p^2+4}{p^2-9}\cdot x \quad \Big|\cdot(p+3)\cdot(p-3)$

1) Pro $\boxed{p=\pm 3}$ je $\boxed{x \in \emptyset}$

Pro $\boxed{p \neq \pm 3}$ platí:

$$(2x+p^2)\cdot(p-3) + (2x-p^2)\cdot(p+3) = (p^2+4)\cdot x$$

$$2px \cancel{+p^3} \cancel{-6x} - 3p^2 + 2px \cancel{-p^3} \cancel{+6x} - 3p^2 = p^2x + 4x$$

$$4px - 6p^2 = p^2x + 4x$$

$$4px - p^2x - 4x = 6p^2$$

$$x(4p - p^2 - 4) = 6p^2$$

$$-x(p^2 - 4p + 4) = 6p^2 \quad |\cdot(-1)$$

$$x(p^2 - 4p + 4) = -6p^2$$

$$x(p-2)^2 = -6p^2$$

Pro $(p-2)^2 = 0$ platí, že také

$$p - 2 = 0$$

$\boxed{p = 2}$ a dostaneme

$$x(2-2)^2 = -6\cdot 2^2$$

$$\boxed{0x = -24} \Rightarrow \boxed{x \in \emptyset}$$

Pro $(p-2)^2 \neq 0$

$$p - 2 \neq 0$$

$\boxed{p \neq 2}$ dostáváme

$$x = \frac{-6p}{(p-2)^2} = \boxed{-\frac{6p}{(p-2)^2}}$$

p	Řešení
$p = \pm 3$	$x \in \emptyset$
$p = 2$	$x \in \emptyset$
$p \neq \pm 3,\ p \neq 2$	$x = -\dfrac{6p}{(p-2)^2}$

Lineární rovnice se 2 parametry (není učivo OA)

Příklad 29: Řešte rovnice s parametry $\underline{a}, \underline{b}$ a neznámou $\underline{x}$.

$$\frac{x+a}{x+1} = b \quad |\cdot(x+1) \quad \text{s podmínkou } \boxed{x \neq -1}$$

$$x + a = b(x+1)$$

$$x + a = bx + b$$

$$x - bx = b - a$$

$$x(1-b) = b - a$$

Diskuse:

Je-li $\boxed{b=1 \wedge a=1}$, tak platí:

$x(1-1)=1-1$

$\boxed{0x=0}$

$\boxed{x \in R-\{-1\}}$

Je-li $\boxed{b=1 \wedge a\neq 1}$, tak platí:

$x(1-1)=b-a$

$0x = \underbrace{b-a}_{\text{je reál. číslo}}$

$\boxed{x \in \emptyset}$

Je-li $\boxed{b\neq 1 \wedge a\neq 1}$, tak platí:

$x(1-b)=b-a$

$\boxed{x=\frac{b-a}{1-b}}$

parametry a, b	Řešení
$b=1,\ a=1$	$x \in R-\{-1\}$
$b=1,\ a\neq 1$	$x \in \emptyset$
$b\neq 1,\ a\neq 1$	$x=\frac{b-a}{1-b}$

Soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými

Soustava rovnic
$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2,$$
kde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in R$, se nazývá soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými x, y. Jejím řešením je každá uspořádaná dvojice $[x_0, y_0]$, která je řešením obou jejích rovnic.

Řešení těchto soustav provádíme metodou sčítací, dosazovací nebo kombinovanou z těchto metod. Ze ZŠ víme, že soustava může mít jedno řešení, nebo nekonečně mnoho řešení, nebo žádné řešení.

Příklad 1: Řešte soustavy rovnic (údaje v závorce jsou př. ze sbírky úloh pro OA).

a) (1a/125 OA): $3x+y=3$ $\quad /\cdot(-2)\ /\cdot 2$ Vyřešíme sčítací metodou.

$\underline{2x-2y=10}$ $\quad /\cdot 3$