13a) LINEÁRNÍ NEROVNICE. NEROVNICE S ABSOLUTNÍ HODNOTOU

Úvodní poznámka: Nerovnice řešíme podobně jako rovnice – s tím rozdílem, že po vynásobení nerovnice záporným číslem musíme obrátit znak nerovnosti (> na <, < na >).

Řešením nerovnice nazýváme každé číslo, které po dosazení do nerovnice promění tuto nerovnici v nerovnost.

Příklad 1: Řešte nerovnice:

NEROVNICE S JEDNOU NEZNÁMOU

Poznámka: Nerovnost neobsahuje neznámou.

a) $3x-7 \geqq 5x-13$

$3x-5x \geqq -13+7$

$-2x \geqq -6 \quad |:(-2)$ nebo $|\cdot(-\frac{1}{2})$

$\boxed{x \geqq 3}$, což lze zapsat $x \in \langle 3; +\infty)$

Nekonečno není číslo, ale jen symbol, proto se píše za ním, nebo před ním jen kulatá závorka.

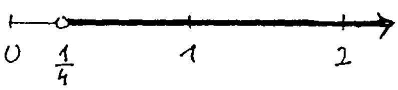
b) $y^2 - \frac{y(2y+3)}{2} < \frac{y-1}{2} \quad |\cdot 2$

$2y^2 - y(2y+3) < y-1$

$\cancel{2y^2} - \cancel{2y^2} - 3y < y-1$

$-4y < -1 \quad |\cdot(-\frac{1}{4})$

$\boxed{y > \frac{1}{4}}$; $y \in (\frac{1}{4}; +\infty)$



Správnost výsledku nelze dokázat, ale jen ověřit, například vybráním jedné hodnoty x z intervalu $(\frac{1}{4}; +\infty)$. Například pro $x = 1$ platí:

$L = 1^2 - \frac{1(2\cdot 1+3)}{2} = 1 - \frac{5}{2} = -1{,}5$

$P = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0$

$-1{,}5 < 0$, čili $L < P$.

c) $\frac{(x-3)^2}{3} - \frac{(2x-1)^2}{12} - x > 0 \quad |\cdot 12$

$4(x-3)^2 - (2x-1)^2 - 12x > 0$

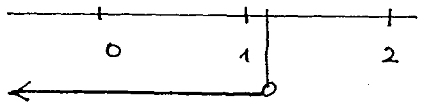
$4(x^2-6x+9) - (4x^2-4x+1) - 12x > 0$

$4x^2 - 24x + 36 - 4x^2 + 4x - 1 - 12x > 0$

$-32x > -35 \quad |\cdot(-\frac{1}{32})$

$x < 1\frac{3}{32} \left(\frac{35}{32}\right)$

$x \in (-\infty; \frac{35}{2})$



Ověření správnosti provedeme např. pro $x = 0$.

$L = \frac{(0-3)^2}{3} - \frac{(2\cdot 0-1)^2}{12} - 0 = \frac{(-3)^2}{3} - \frac{(-1)^2}{12} = \frac{9}{3} - \frac{1}{12} = 2\frac{11}{12}$

$P = 0$

$2\frac{11}{12} > 0$, čili $L > P$

d) $(x+8).(x-5)<0$

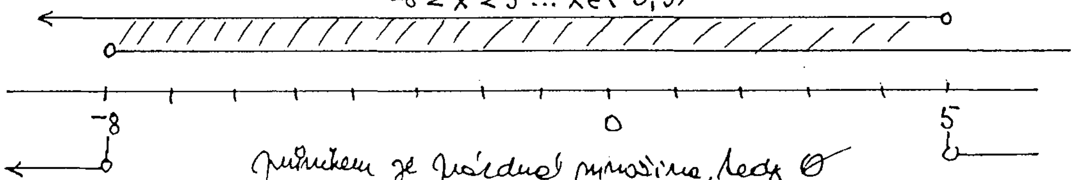
Vyjdeme z poznatku, že součin dvou čísel je záporný, jestliže jedno z nich je kladné (tedy větší než 0) a druhé záporné (čili menší než 0). Proto řešíme takto:

$(x+8>0 \wedge x-5<0) \vee (x+8<0 \wedge x-5>0)$

a zároveň — nebo — a zároveň

$(x>-8 \wedge x<5) \vee (x<-8 \wedge x>5)$

$-8<x<5 \ldots x\in(-8;5)$



průnikem je prázdná množina, tedy Ø

Řešení: $x\in(-8;5)\cup\emptyset = (-8;5)$ ... Řešením je interval $(-8;5)$; $x\in(-8;5)$.

Ověříme dosazením hodnoty jednoho x z intervalu $(-8;5)$, např.

pro $x=-2$:

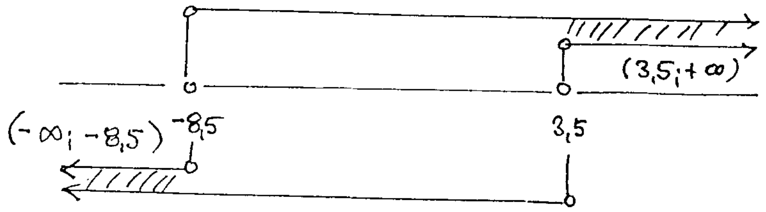
$L=(-2+8).(-2-5)=6.(-7)=-42$, $P=0$, platí: $-42<0$, čili $L<P$.

---

e) $(x-3,5).(x+8,5)>0$ Víme, že součin dvou čísel je kladný, jestliže jsou obě čísla kladná, nebo obě záporná. Proto řešíme takto.

$(x-3,5>0 \wedge x+8,5>0) \vee (x-3,5<0 \wedge x+8,5<0)$

$(x>3,5 \wedge x>-8,5) \vee (x<3,5 \wedge x<-8,5)$



Řešením dané nerovnice je sjednocení dvou intervalů.

$\boxed{x\in(-\infty;-8,5)\cup(3,5;+\infty)}$ nebo $\boxed{K=(-\infty;-8,5)\cup(3,5;+\infty)}$

např. a) pro $x=-9$, $x=4$

$L=(-9-3,5).(-9+8,5)=(-12,5).(-0,5)=+6,25$, $P=0$ ... $L>P$

$L=(4-3,5).(4+8,5)=0,5.12,5=6,25$, $P=0$, $L>P$

f) Dokažte, že dané nerovnice platí pro všechna $x \in R$.

1) $(x-2)^2 > x(x-4)$

$x^2-4x+4 > x^2-4x$

$0x^2+0x+4>0$, (čili $4>0$) Platí pro každé $x \in R$.

2) $(x+7)^2 > x(x+14)$

$x^2+14x+49 > x^2+14x$

$0x^2+0x+49>0$, platí pro každé $x \in R$.

Příklad 2: Která přirozená čísla jsou řešením nerovnice?

a) $x-4 \leqq 3{,}1$

$x \leqq 7{,}1 \ldots \boxed{x \in \{1,2,3,4,5,6,7\}}$

b) $x+5 \leqq 9{,}7$

$x \leqq 4{,}7 \ldots \boxed{x \in \{1,2,3,4\}}$

c) $2(x-3)^2 - \frac{1}{2} \geqq \frac{(2x-3)(2x+3)}{2} - x \quad |\cdot 2$

$4(x-3)^2 - 1 \geqq 4x^2-9 \quad -2x$

$4(x^2-6x+9)-1 \geqq 4x^2-2x-9$

$\cancel{4x^2}-24x+36-1 \geqq \cancel{4x^2}-2x-9$

$-22x \geqq -44 \quad |:(-22)$

$x \leqq 2 \ldots \boxed{x \in \{1,2\}}$

Příklad 3: Řešte v oboru Z^- (celých záporných čísel) nerovnici:

$\frac{4x-3}{5} < \frac{3x-4}{2} - \frac{2x-5}{3} \quad |\cdot 30$

$6(4x-3) < 15(3x-4) - 10(2x-5)$

$24x-18 < 45x-60-20x+50$

$-x < 8 \quad |\cdot(-1) \rightarrow x > -8$

$\boxed{x \in \{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1\}}$

Příklad 4: V množině Z^- (tj. celých záporných čísel) řešte: Určete všechna čísla, jejichž dvojnásobek zvětšený o 9 je větší než původní číslo zvětšené o 4.

Řešení: $2x+9 > x+4$

$x > -5$ $\boxed{x \in \{-4, -3, -2, -1\}}$

Následující příklady jsou ze Sbírky úloh pro OA (jen výběr)

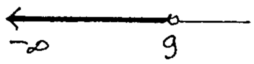
Příklad 5 (jde o příklady 1–4 180,31 –OA

a) V množině R řešte nerovnice a řešení vyznačte na číselné ose.

$2x-4 < x+5$

$x < 9$

$x \in (-\infty, 9)$



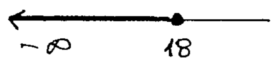
$5(x-3) \leqq 3(x+7)$

$5x-15 \leqq 3x+21$

$2x \leqq 36 \quad |:2$

$x \leqq 18$

$x \in (-\infty; 18\rangle$



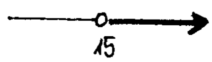
$\dfrac{5(x-1)}{6} - 1 > \dfrac{2(x+1)}{3} \quad |\cdot 6$

$5(x-1) - 6 > 4(x+1)$

$5x-5-6 > 4x+4$

$x > 15$

$x \in (15, +\infty)$



$\dfrac{5x-1}{2} < \dfrac{10x-7}{3} - \dfrac{5x+1}{6} \quad |\cdot 6$

$3(5x-1) < 2(10x-7) - (5x+1)$

$15x-3 < 20x-14-5x-1$

$0x < -12$

Nerovnice nemá řešení.

$\dfrac{1}{3}(4x-1) + \dfrac{1}{4}(2x+1) > x + \dfrac{1}{6}(x-2) \quad |\cdot 12$

$4(4x-1) + 3(2x+1) > 12x + 2(x-2)$

$16x-4+6x+3 > 12x+2x-4$

$8x > -3 \quad |:8$

$x > -\dfrac{3}{8}$ $\boxed{x \in \left(-\dfrac{3}{8}, \infty\right)}$

$\dfrac{3x-6}{4} < \dfrac{6x+1}{8} \quad |\cdot 8$

$2(3x-6) < 6x+1$

$6x-12 < 6x+1$

$0x < 13$

Nerovnici vyhovuje každé $x \in R$.

$2x - \sqrt{2} < x\sqrt{2} - 2$

$2x - x\sqrt{2} < -2 + \sqrt{2}$

$x(2-\sqrt{2}) < -2+\sqrt{2}$

$x < -\dfrac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$x < -1$

$\boxed{x \in (-\infty; -1)}$

Tento příklad není učivo OA. !

Příklad 6: Která přirozená čísla vyhovují nerovnicím:

$$\frac{3x-5}{4} + \frac{x+2}{3} < \frac{x}{2} + \frac{x+8}{5} \quad |\cdot 60$$

$$15(3x-5) + 20(x+2) < 30x + 12(x+8)$$

$$45x - 75 + 20x + 40 < 30x + 12x + 96$$

$$23x < 131 \quad |:23$$

$$x < 5\tfrac{16}{23}$$

$$\boxed{x \in \{1,2,3,4,5\}}$$

$$\frac{4x-3}{3} + \frac{2x-1}{2} > \frac{x}{3} + \frac{x-1}{4} \quad |\cdot 12$$

$$4(4x-3) + 6(2x-1) > 4x + 3(x-1)$$

$$16x - 12 + 12x - 6 > 4x + 3x - 3$$

$$21x > 15 \quad |\cdot \tfrac{1}{21}$$

$$x > \frac{15}{21}$$

$\boxed{x \in N}$ (Řešením je každé přirozené číslo.)

Příklad 7: Která záporná celá čísla vyhovují nerovnicím:

$$\frac{4x+3}{4} - \frac{3x-1}{6} \geqq \frac{1}{6} \quad |\cdot 12$$

$$3(4x+3) - 2(3x-1) \geqq 2$$

$$12x + 9 - 6x + 2 \geqq 2$$

$$6x \geqq -9$$

$$x \geqq -1{,}5$$

$$\boxed{x \in \{1\}}$$

$$\frac{2x+1}{2} - \frac{x-1}{5} \geqq \frac{2x}{3} \quad |\cdot 30$$

$$15(2x+1) - 6(x-1) \geqq 20x$$

$$30x + 15 - 6x + 6 \geqq 20x$$

$$4x \geqq -21 \quad |:4$$

$$x \geqq -5\tfrac{1}{4}$$

$\boxed{x \in \{-5,-4,-3,-2,-1\}}$ Konec příkladů pro OA. !

Příklad 8: Řešte nerovnice

$$(4x-1)^2 + 7x < (8x+1)\cdot(2x-4)$$

$$\cancel{16x^2} - 8x + 1 + 7x < \cancel{16x^2} + 2x - 32x - 4$$

$$29x < -5 \quad |:29$$

$$x < -\frac{5}{29}$$

$$\boxed{x \in \left(-\infty; -\frac{5}{29}\right)}$$

$$(x-3)^2 \leqq x(x+2) + 3$$

$$\cancel{x^2} - 6x + 9 \leqq \cancel{x^2} + 2x + 3$$

$$-8x \leqq -6 \quad |:(-8)$$

$$x \geqq \frac{3}{4}$$

$$\boxed{x \in \left\langle \frac{3}{4}, \infty \right)}$$

Příklad 9: Najděte kladná dvojciferná čísla menší než 48, je-li hodnota, kterou představuje cifra na místě desítek o 2 menší než hodnota, kterou představuje cifra na místě jednotek.

Řešení: $\underbrace{10a}_{\text{cifra desítek}} + \underbrace{b}_{\text{cifra jednotek}} < 48$

Platí: $a = b - 2$

$10a + b < 48$ $\qquad b = \{\underbrace{0, 1, 2}_{\text{nelze použít}}, 3, 4, 5, 6\}$

$10(b-2) + b < 48$ $\qquad 6-2=4 \dots 46$

$10b - 20 + b < 48$ $\qquad 5-2=3 \dots 35$

$11b < 68$ $\qquad 4-2=2 \dots 24$

$b < 6\frac{2}{3}$ $\qquad 3-2=1 \dots 13$

Hledaná čísla jsou 13, 24, 35, 46.

Soustavy lineárních nerovnic s jednou neznámou (jen učivo OA)

Příklad 10: Určete všechna x, která vyhovují soustavě nerovnic:

a) $2x - 7 \leqq 0$
$\quad 3x + 1 > 0$

Každou nerovnici vyřešíme samostatně a určíme množinu jejich řešení P_1, P_2. Množinou řešení pak bude množina P, pro kterou platí: $P = P_1 \cap P_2$

$2x - 7 \leqq 0$

$2x \leqq 7$

$x \leqq 3{,}5 \ \left(\frac{7}{2}\right)$

$\boxed{P_1 = (-\infty; 3{,}5\rangle} \left(\frac{7}{2}\right)$

$3x + 1 > 0$

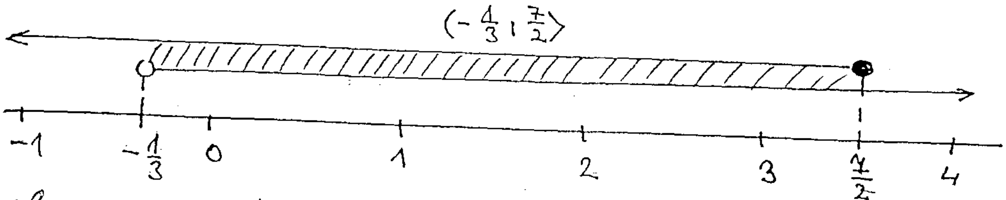
$3x > -1$

$x > -\frac{1}{3}$

$\boxed{P_2 = \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)}$

$P = P_1 \cap P_2 = \left(-\infty; \frac{7}{2}\right\rangle \cap \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right) = \left(-\frac{1}{3}; \frac{7}{2}\right\rangle$

$\boxed{P = \left(-\frac{1}{3}; \frac{7}{2}\right\rangle}$ nebo $\boxed{x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{7}{2}\right\rangle}$ viz obr.



Správnost výsledku se nedokazuje, ale jen ověřuje výběrem aspoň jedné hodnoty x z intervalu $\left(-\frac{1}{3}; \frac{7}{2}\right\rangle$. Např. pro $x = 2$ platí:

$L_1 = 2\cdot 2 - 7 = 4 - 7 = -3$ $\qquad$ $L_2 = 3\cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$

$P_1 = 0$, $L_1 \leqq P_1$ $\qquad$ $P_2 = 0$, $L_2 > P_2$

---

b) $5u - 2 > 6 - 4u$
$\underline{7u - 11 > u - 3}$

$5u - 2 > 6 - 4u$

$5u + 4u > 6 + 2$

$9u > 8 \quad |:9$

$\boxed{u > \frac{8}{9}}$

$\boxed{P_1 = (\frac{8}{9}, +\infty)}$

$7u - 11 > u - 3$

$6u > 8 \quad |:6$

$\boxed{u > \frac{4}{3}}$

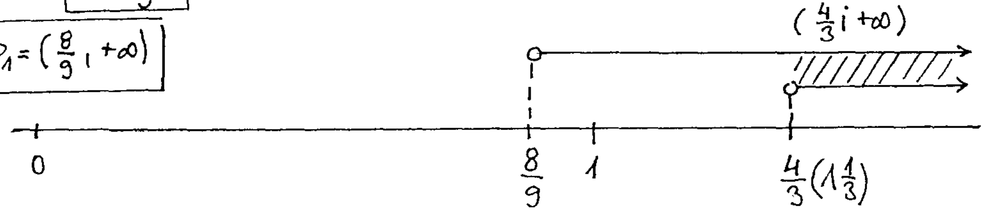
$\boxed{P_2 = (\frac{4}{3}, +\infty)}$

$P = P_1 \cap P_2 =$

$= (\frac{8}{9}, +\infty) \cap (\frac{4}{3}, +\infty) =$

$= (\frac{4}{3}, +\infty)$

Soustava má řešení $\boxed{u \in (\frac{4}{3}, +\infty)}$



Můžeme tedy říci, že řešením soustavy nerovnic je interval $(\frac{4}{3}, +\infty)$.

---

c) $2x + 3 \leqq x + 1$
$\underline{4x > 4 - x}$

$2x + 3 \leqq x + 1$

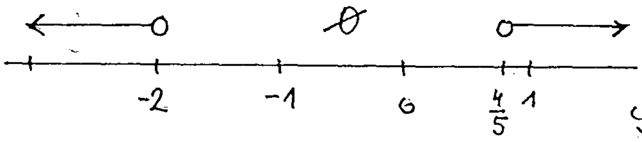
$x \leqq -2$

$\boxed{P_1 = (-\infty; -2)}$

$4x > 4 - x$

$5x > 4$

$x > \frac{4}{5} (0{,}8)$ $\qquad$ $\boxed{P_2 = (0{,}8; +\infty)}$



$P = P_1 \cap P_2 = (-\infty; -2) \cap (0{,}8; +\infty) = \emptyset$ $\qquad$ Soustava nerovnic nemá řešení.

---

d) $-2 < x + 5 < 2$ …Tuto „dvoustrannou" nerovnici můžeme vyjádřit formou soustavy:

$x + 5 > -2$
$\underline{x + 5 < 2}$

$x + 5 > -2$

$x > -7$

$P_1 = (-7; \infty)$

$x + 5 < 2$

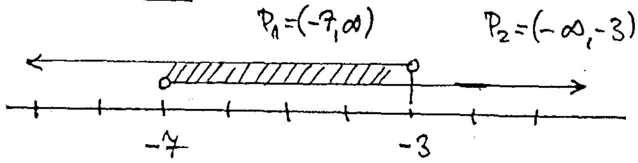
$x < -3$

$P_2 = (-\infty; -3)$

$P_1 \cap P_2 = (-7; \infty) \cap (-\infty; -3) = (-7; -3)$

Řešení:

$\boxed{x \in (-7; -3)}$



---

e) Řešte v oboru celých čísel (= množiny Z) $-2 \leqq \frac{2a+1}{3} \leqq 0$

Řešení:

$$\frac{2a+1}{3} \geqq -2$$
$$\frac{2a+1}{3} \leqq 0$$

$2a+1 \geqq -6$

$2a \geqq -7 \quad |:2$

$a \geqq -\frac{7}{2}$

$a \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

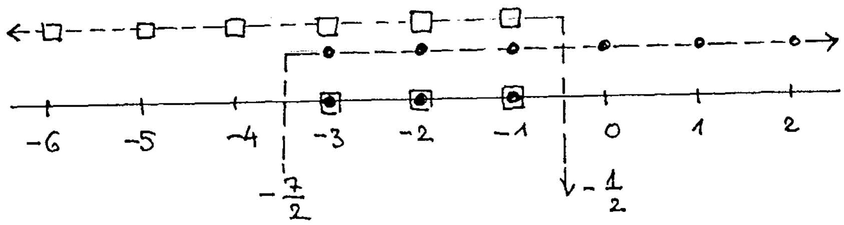
$\frac{2a+1}{3} \leqq 0 \quad |\cdot 3$

$2a+1 \leqq 0$

$2a \leqq -1 \quad |:2$

$a \leqq -\frac{1}{2}$

$a \in \{-1, -2, -3, \ldots\}$



Řešení: $x \in \{-3, -2, -1\}$

---

f) Řešte v množině přirozených čísel soustavu nerovnic:

$$3x - 10 > 0$$
$$\frac{16}{3}x - 51 < 6$$

$3x > 10 \quad |:3$

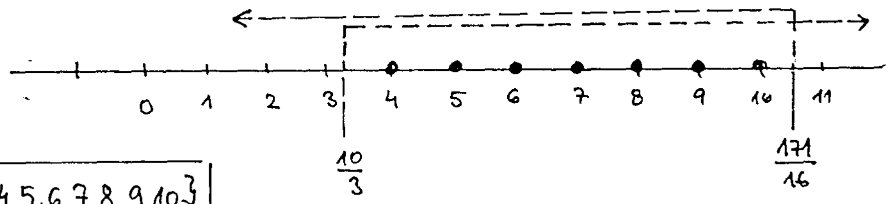
$x > \frac{10}{3} \left(3\frac{1}{3}\right)$

$\frac{16}{3}x - 51 < 6 \quad |\cdot 3$

$16x - 153 < 18$

$16x < 171 \quad |:16$

$x < \frac{171}{16} \left(10\frac{11}{16}\right)$



$\boxed{x \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}}$

---

následují tři soustavy ze sbírky pro OA

Příklad 11:

a) podle 5d/131 OA

$$7x - 4 \geqq 3\left(\frac{x}{2} - 2\right)$$
$$4x + \frac{1}{2}(x+3) \geqq 2\left(\frac{x}{3} - 1\right)$$

$7x - 4 \geqq 1{,}5x - 6$

$5{,}5x \geqq -2 \quad |:2$

$x \geqq -\frac{4}{11}$

$\boxed{x \in \langle -\frac{4}{11}, \infty)}$ mělo

$P_1 = \langle -\frac{4}{11}, \infty)$

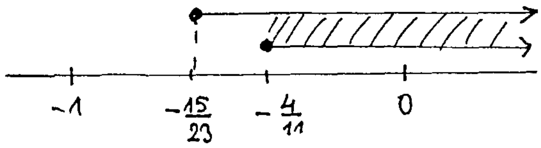
$4x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \geqq \frac{2}{3}x - 1 \quad |\cdot 6$

$24x + 3x + 9 \geqq 4x - 6$

$23x \geqq -15$

$x \geqq -\frac{15}{23}$

$P_2 = \langle -\frac{15}{23}, \infty)$ $\boxed{x \in \langle -\frac{15}{23}, \infty)}$



$P = P_1 \cap P_2 = \langle -\frac{4}{11}, \infty) \cap \langle -\frac{15}{11}, \infty) = \boxed{\langle -\frac{4}{11}, \infty)} = P$

b) 5e1310A: $2 + 3x < \frac{x}{2}$

$\frac{4x-3}{4} + \frac{3x-1}{6} \geqq 1 \quad |\cdot 12$

$3x < \frac{x}{2} - 2$

$3x - \frac{x}{2} < -2 \quad |\cdot 2$

$6x - x < -4$

$5x < -4 \quad |:5$

$\boxed{x < -\frac{4}{5}}$

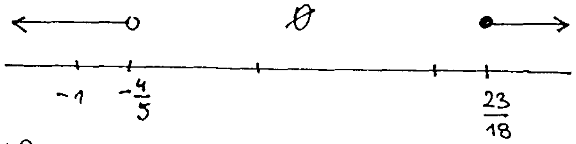
$3(4x-3) + 2(3x-1) \geqq 12$

$12x - 9 + 6x - 2 \geqq 12$

$18x \geqq 23 \quad |:18$

$\boxed{x \geqq \frac{23}{18}}$

$P_1 = (-\infty, -\frac{4}{5}) \quad P_2 = \langle \frac{23}{18}, \infty)$



$P_1 \cap P_2 = \emptyset$

Soustava nerovnic nemá řešení.

c) 6a1320A Jde o soustavu tří nerovnic

$2(x-2) - 3(x+1) \geqq 3x - 1$ (1)

$4(2-x) + 2(x-1) > 5x + 3$ (2)

$7(x+4) - 2x \geqq 3x - 2$ (3)

(1) $2x - 4 - 3x - 3 \geqq 3x - 1$

$-4x \geqq 6 \quad |:(-4)$

$x \leqq -1{,}5 \; (-\frac{3}{2})$

$\boxed{P_1 = (-\infty; -1{,}5\rangle}$

(2) $8 - 4x + 2x - 2 > 5x + 3$

$-7x > -3 \quad |:(-7)$

$x < \frac{3}{7}$

$\boxed{P_2 = (-\infty; \frac{3}{7})}$

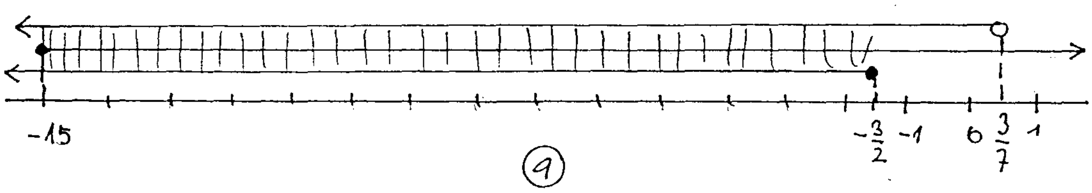
(3) $7x + 28 - 2x \geqq 3x - 2$

$2x \geqq -30 \quad |:2$

$x \geqq -15$

$\boxed{P_3 = \langle -15, \infty)}$

$\boxed{P = P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \langle -15; -\frac{3}{2}\rangle}$



Nerovnice s proměnnou ve jmenovateli:
= nerovnice v podílovém tvaru (= rac. nerovnice)

Příklad 12: Řešte nerovnici $\frac{x-2}{x+6} \geqq -2$

1. způsob (ten se nejčastěji používá)

$$\frac{x-2}{x+6} \geqq -2$$
$$\frac{x-2}{x+6} + 2 \geqq 0$$
$$\frac{x-2+2(x+6)}{x+6} \geqq 0$$
$$\frac{x-2+2x+12}{x+6} \geqq 0$$
$$\frac{3x+10}{x+6} \geqq 0$$

Výraz na levé straně nerovnice představuje nezáporné číslo, tzn., že je kladné, nebo nula.

Platí:

Zlomek je nezáporný, právě když je
- čitatel nezáporný a zároveň jmenovatel kladný,

NEBO
- čitatel nekladný (tj. záporný, nebo nula) a zároveň jmenovatel záporný.

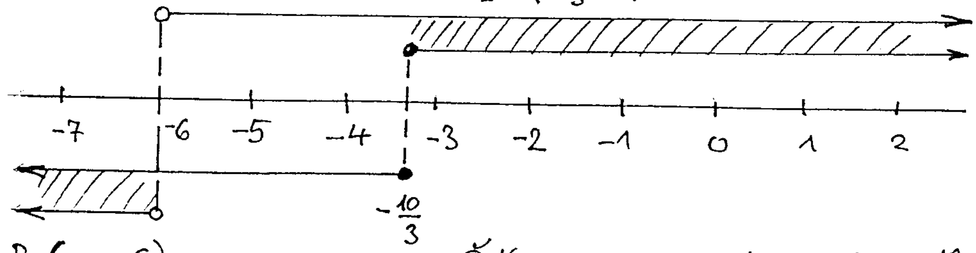
$$(3x+10 \geqq 0 \underset{a}{\wedge} x+6>0) \underset{nebo}{\vee} (3x+10 \leqq 0 \wedge x+6<0)$$

$$(3x \geqq -10 \wedge x > -6) \vee (3x \leqq -10 \wedge x < -6)$$

$$\underbrace{\left(x \geqq -\frac{10}{3} \wedge x > -6\right) \vee \left(x \leqq -\frac{10}{3} \wedge x < -6\right)}$$

· zobrazíme na číselné ose

$P_2 = \langle -\frac{10}{3}; \infty)$



$P_1 = (-\infty; -6)$

Řešení: $P = P_1 \cup P_2 = (-\infty; -6) \cup \langle -\frac{10}{3}; \infty)$

Tento zápis představuje soustavy nerovnic:

$$\begin{array}{ll} 3x+10 \geqq 0 & 3x+10 \leqq 0 \\ x+6>0 & x+6<0 \end{array}$$

Správnost řešení si můžeme ověřit, např. pro $x=-7$, $x=-3$ platí:

2. způsob (pomocí tzv. nulových bodů

1. krok: Po stejné úpravě jako při 1. způsobu řešení získáme nerovnici $\frac{3x+10}{x+6} \geq 0$

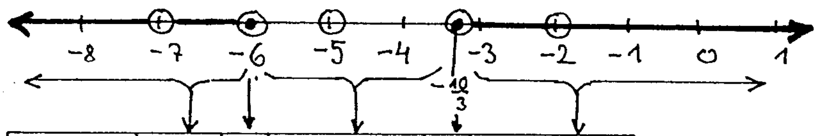
2. krok: Vypočítáme nulové body takto:

$3x+10=0$ $\qquad$ $x+6=0$

$3x=-10$

$\boxed{x=-\frac{10}{3}}$ $\qquad$ $\boxed{x=-6}$

Obě čísla zobrazíme na číselné ose. Po jejich umístění na č. osu se tato osa rozdělí na tři číselné intervaly, které jsou „oddělené" těmito nulovými body.



x	$(-\infty,-6)$	-6	$(-6,-\frac{10}{3})$	$-\frac{10}{3}$	$(-\frac{10}{3},+\infty)$
$3x+10$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+6$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{3x+10}{x+6}$	$+$	X	$-$	0	$+$

nezáporný $\qquad$ nezáporný

zlomek

3. krok: O tom, jakou hodnotu (tj. +, −, 0) budou nabývat dvojčleny $3x+10$ a $x+6$, se přesvědčíme tím, že si z jednotlivých intervalů vybereme 1 číslo a to do nich dosadíme. Vybrané čísla včetně nulových bodů jsou zakroužkovány. Např.:

Pro $x=-7$ je $3x+10=3.(-7)+10=-11$, mínus napíšeme do tabulky.

Pro $x=-6$ je $x+6=-6+6=0$, nulu napíšeme do tabulky atd.

4. krok: Do posledního řádku tabulky pak doplníme +, −, 0 nebo nic (nedefinováno) takto

$$\frac{-}{-} = + \quad \frac{-}{0} = \text{nedef.}, \quad \frac{0}{+} = 0 \quad \frac{+}{+} = +$$

5. krok: Z posledního řádku tabulky vyčteme, že zlomek

$\frac{3x+10}{x+6}$ je nezáporný, když $x \in (-\infty, -6) \cup \langle -\frac{10}{3}, +\infty)$

Příklad 13: Řešte nerovnice ze sbírky pro OA (autor)

a) 1a)/132 OA:

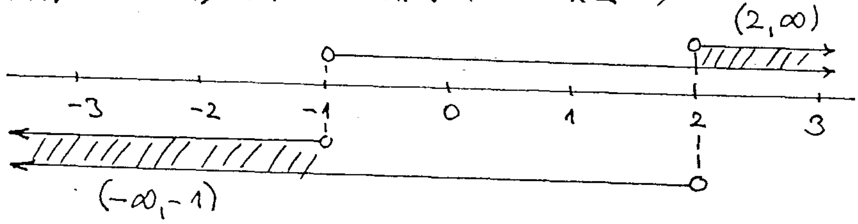
$$\frac{x+1}{x-2} > 0$$

Zlomek je kladný, když jeho čitatel je kladný a zároveň jeho jmenovatel je kladný, nebo čitatel je záporný a zároveň jmenovatel je záporný.

Platí:

$(x+1>0 \wedge x-2>0) \vee (x+1<0 \wedge x-2<0)$

$(x>-1 \wedge x>2) \vee (x<-1 \wedge x<2)$



Výsledek: $\boxed{x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)}$

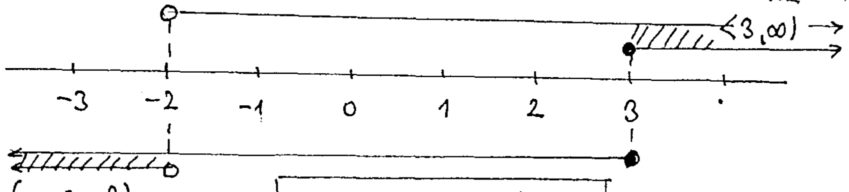
---

b) 1b/132 OA

$$\frac{x-3}{x+2} \geqq 0$$

Řešení: $(x-3 \geqq 0 \wedge x+2>0) \vee (x-3 \leqq 0 \wedge x+2<0)$

$(x \geqq 3 \wedge x>-2) \vee (x \leqq 3 \wedge x<-2)$



$(-\infty, -2)$ Řešení: $\boxed{x \in (-\infty, -2) \cup \langle 3, \infty)}$

---

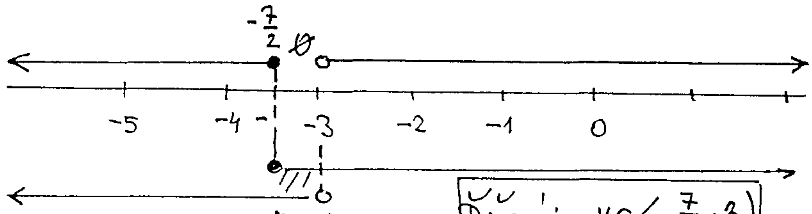
c) 2b/320A:

$$\frac{2x+7}{x+3} \leqq 0$$

$(2x+7 \leqq 0 \wedge x+3>0) \vee (2x+7 \geqq 0 \wedge x+3<0)$

$(2x \leqq -7 \wedge x>-3) \vee (2x \geqq -7 \wedge x<-3)$

$(x \leqq -\frac{7}{2} \wedge x>-3) \vee (x \geqq -\frac{7}{2} \wedge x<-3)$



$\boxed{\text{Řešení: } x \in \langle -\frac{7}{2};3)}$

---

d) 3c/320A:

$$\frac{3x+2}{1-x} \leqq 3$$

$$\frac{3x+2}{1-x} - 3 \leqq 0$$

$$\frac{3x+2-3(1-x)}{1-x} \leqq 0$$

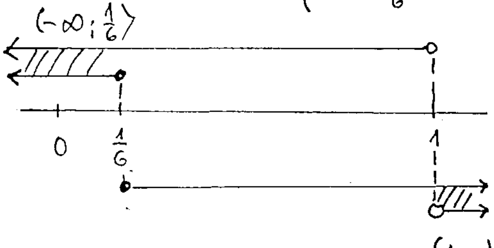
$$\frac{3x+2-3+3x}{1-x} \leqq 0$$

$$\frac{6x-1}{1-x} \leqq 0$$

$(6x-1 \leqq 0 \wedge 1-x>0) \vee (6x-1 \geqq 0 \wedge 1-x<0)$

$(6x \leqq 1 \wedge -x>-1) \vee (6x \geqq 1 \wedge -x<-1$

$(x \leqq \frac{1}{6} \wedge x<1) \vee (x \geqq \frac{1}{6} \wedge x>1)$



$\boxed{x \in (-\infty,\frac{1}{6}\rangle \cup (1,\infty)}$

---

e) 4a/320A (NÁROČNÝ)

$$\frac{2x+1}{x+2} < 1 < \frac{3x+1}{x-1}$$

Vyjádříme ve tvaru soustavy nerovnic. Pak samostatně určíme řešení 1. nerovnice, řešení 2. nerovnice. Výsledkem řešení soustavy bude pak průnik řešení obou nerovnic.

$$\frac{2x+1}{x+2} < 1$$

$$\frac{3x+1}{x-1} > 1$$

$$\frac{2x+1}{x+2} - 1 < 0$$

$$\frac{2x+1-x-2}{x+2} < 0$$

$$\frac{x-1}{x+2} < 0$$

$(x-1>0 \wedge x+2<0) \vee (x-1<0 \wedge x+2)>0)$

$$\underbrace{\boxed{(x>1 \quad \wedge \quad x<-2)}}_{P_2=(1;+\infty)} \vee \underbrace{\boxed{(x<1 \quad \wedge \quad x>-2)}}_{P_1=(-2;1)}$$

grafická interpretace je nad číselnou osou

Pro 2. nerovnici platí

$$\frac{3x+1}{x-1}-1>0$$

$$\frac{3x+1-x+1}{x-1}>0$$

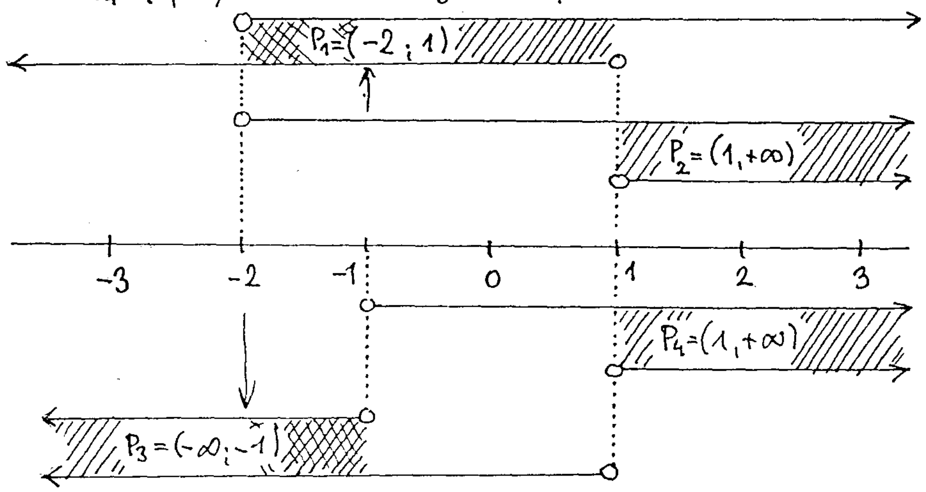
$$\frac{2x+2}{x-1}>0$$

$$\frac{2(x+1)}{x-1}>0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{x+1}{x-1}>0$$

$(x+1>0 \wedge x-1>0) \vee (x+1<0 \wedge x-1<0)$

$$\underbrace{\boxed{(x>-1 \quad \wedge \quad x>1)}}_{P_4=(1,+\infty)} \vee \underbrace{\boxed{(x<-1 \quad \wedge \quad x<1)}}_{P_3=(-\infty,-1)}$$



$P_1 \cup P_2 = (-2,1) \cup (1,+\infty)$ $\quad$ $P_3 \cup P_4 = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

$P = (P_1 \cup P_2) \cap (P_3 \cup P_4) = (-2,-1)$ $\quad$ $\boxed{\text{Výsledek: } x \in (-2,-1)}$

Příklad 14 (z jiných zdrojů než OA):

$$\frac{2x-3}{x} < \frac{2x-3}{x(x+1)} \quad | \cdot x \quad (x \neq 0,\ x \neq -1)$$

$$2x-3 < \frac{2x-3}{x+1} \quad | (x+1)$$

$$(2x-3)\cdot(x+1) < 2x-3$$

$$2x^2-3x+2x-3 < 2x-3$$

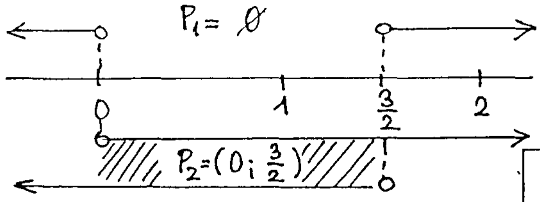
$$2x^2-3x < 0$$

$$x(2x-3) < 0$$

$$x(2x-3)<0 \Leftrightarrow (x<0 \wedge 2x-3>0) \vee (x>0 \wedge 2x-3<0)$$

$$(x<0 \wedge 2x>3) \vee (x>0 \wedge 2x<3)$$

$$\boxed{(x<0 \wedge x>\tfrac{3}{2}) \vee (x>0 \wedge x<\tfrac{3}{2})}$$



$P = P_1 \cup P_2 =$
$= \emptyset \cup (0; \frac{3}{2})$

$$\boxed{P = (0; \tfrac{3}{2})}$$

Příklad 15: Řešte pomocí nulových bodů nerovnici (viz str. 11)

$$\frac{2x-6}{3-2x} \geqq 2$$

$$\frac{2x-6}{3-2x} - 2 \geqq 0$$

$$\frac{2x-6-2(3-2x)}{3-2x} \geqq 0$$

$$\frac{2x-6-6+4x}{3-2x} \geqq 0$$

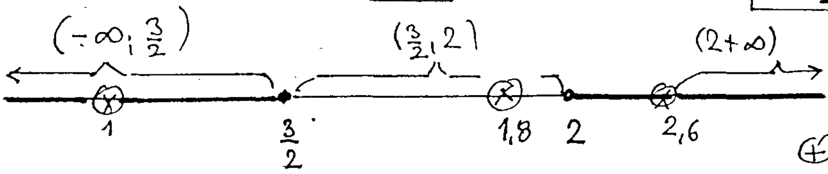
$$\frac{6x-12}{3-2x} \geqq 0$$

$$\frac{6(x-2)}{3-2x} \geqq 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{6}$$

$$\frac{x-2}{3-2x} \geqq 0$$

Určíme nulové body: $x-2=0$ $\qquad 3x-2x=0$

$\boxed{x=2}$ $\qquad -2x=-3 \rightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}}$



⊕, ⊖, ⊡ získáš po dosazení $x=1$, $x=1{,}8$, $x=2{,}6$ do dvojčlenů.

x	$(-\infty; \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2}; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$3-2x$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\frac{x-2}{3-2x}$	⊖	$\times$	⊕	0	⊖

Řešení: $\boxed{x \in (\frac{3}{2}; 2\rangle}$