Slovní úlohy na kvadratické rovnice

Některé úlohy jsou ze „Sbírky úloh z matematiky pro obchodní akademie" (str. 38–39), kde je poznámka OA.

Příklad 26 (OA):

Součet druhých mocnin tří po sobě následujících přirozených čísel je 77. Která jsou to čísla?

Řešení: $x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=77$

$x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=77$

$3x^2+6x-72=0 \quad |:3$

$x^2+2x-24=0$

$x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+96}}{2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{100}}{2}=\dfrac{-2\pm10}{2}=\begin{cases}4\\-6 \ (-6\notin N) \text{ nevyhovuje}\end{cases}$

Zkouška: $4^2+5^2+6^2=77$

Hledaná čísla jsou 4, 5, 6.

Příklad 27 (OA): Dělník měl vyrobit 200 součástek. Denní plán překračoval o 5 součástek, čímž ukončil výrobu součástek o 2 dny před plánovaným termínem. Jak dlouho pracoval?

Řešení: Podle plánu za x dní 200 součástek. Za 1 den $\frac{200}{x}$ součástek.

Skutečnost: $\left(\frac{200}{x}+5\right)\cdot(x-2)=200$

$\cancel{200}+5x-\frac{400}{x}-10=\cancel{200} \quad |\cdot x$

$5x^2-400-10x=0$

$5x^2-10x-400=0 \quad |:5$

$x^2-2x-80=0$

$x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4+320}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{324}}{2}=\dfrac{2\pm18}{2}=\begin{cases}10 \text{ (dní)}; \ 10-2=8\\-8 \text{ (nevyhovuje)}\end{cases}$

Zkouška: $\left.\begin{aligned}200:10&=20\\200:8&=25\end{aligned}\right\}25-20=5$

Dělník pracoval 8 dní.

Příklad 28 (OA): Délka obdélníku je o 12 cm větší než jeho šířka. Zmenšíme-li každý jeho rozměr o třetinu, zmenší se obsah o 60 cm². Určete rozměry obdélníku.

původní S_1 — strany x a $x+12$

po úpravě S_2 — $x-\frac{1}{3}x=\boxed{\frac{2x}{3}}$

$$x+12-\frac{x+12}{3}=\frac{3x+36-x-12}{3}=\boxed{\frac{2x+24}{3}}$$

$$S_2=S_1-60$$

$$\frac{2x+24}{3}\cdot\frac{2x}{3}=x(x+12)-60$$

$$\frac{4x^2+48x}{9}=x^2+12x-60 \quad |\cdot 9$$

$$4x^2+48x=9x^2+108x-540$$

$$5x^2+60x-540=0 \quad |:5$$

$$x^2+12x-108=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{144+432}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{-12\pm 24}{2}= \begin{cases} 6 \\ -18 \text{ nevyhovuje slovní úloze} \end{cases}$$

Šířka: 6 cm
délka: 18 cm } původní

$S_1=18\cdot 6=108\,(cm^2)$ $6-2=4\,(cm)$

$S_2=12\cdot 4=48\,(cm^2)$ $18-6=12\,(cm)$ $108\,cm^2-48\,cm^2=60\,cm^2$

Rozměry obdélníku jsou 18 cm a 6 cm.

Příklad 29 (OA): Dva cyklisté vyjeli současně z místa A do místa B vzdáleného 56 km. První cyklista jel rychlostí o 2 km/h větší než druhý cyklista a přijel do místa B o 30 minut dříve. Určete rychlosti cyklistů.

Řešení:

S = 56 km
A ———— B

Označíme rychlost 2. cyklisty v a jeho čas t; 30 min = $\frac{1}{2}$ h

1. cyklista: $s=(v+2)\cdot\left(t-\frac{1}{2}\right)$

$$56=(v+2)\cdot\left(t-\frac{1}{2}\right) \quad \boxed{1}$$

2. cyklista: $s = v \cdot t$ $\boxed{2}$

$56 = v \cdot t \Rightarrow t = \frac{56}{v}$ dosadí do $\boxed{1}$

$56 = (v+2) \cdot \left(\frac{56}{v} - \frac{1}{2}\right)$

$\cancel{56} = \cancel{56} + \frac{112}{v} - \frac{v}{2} - 1$

$\frac{112}{v} - \frac{v}{2} - 1 = 0 \quad | \cdot 2v$

$224 - v^2 - 2v = 0 \quad | \cdot (-1)$

$v^2 + 2v - 224 = 0$

$v_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+896}}{2} = \frac{-2 \pm 30}{2} = \begin{cases} 14 \ ; \ 16 \\ -16 \text{ (nevyhovuje)} \end{cases}$

Zkouška: $\frac{56}{14} = 4\,(h)$ $\frac{56}{16} = 3{,}5\,(h)$; $4h - 3{,}5h = \frac{1}{2}h = 30$ min

Cyklisté jeli rychlostí 16 km/h a 14 km/h.

(OA) Příklad 30: Jeden dělník zhotoví určitou součástku o 4 h a druhý o 9 h později, než by zhotovili stejnou součástku společně. Za jakou dobu zhotoví součástku každý dělník sám?

Řešení:

Oba dělníci zhotoví 1 součástku za x h, za 1 h zhotovují $\frac{1}{x}$

1. dělník — $(x+4)$ h — $\frac{1}{x+4}$

2. dělník — $(x+9)$ h — $\frac{1}{x+9}$

Platí: $\frac{1}{x+4} + \frac{1}{(x+9)} = \frac{1}{x} \quad | \cdot x(x+4) \cdot (x+9)$

$x(x+9) + x(x+4) = (x+4) \cdot (x+9)$

$\cancel{x^2} + 9x + x^2 + 4x = \cancel{x^2} + 13x + 36$

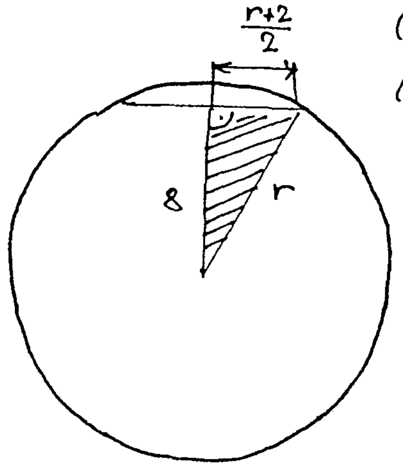
$x^2 + \cancel{13x} = \cancel{13x} + 36$

$x^2 = 36$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{36} \begin{cases} 6 \\ -6 \text{ (nevyhovuje)} \end{cases}$

1. dělník za $(6+4)$ h $= \boxed{10\,h}$
2. dělník za $(6+9)$ h $= \boxed{15\,h}$ → je výsledek

Příklad 31 (OA) Tětiva kružnice má od středu kružnice vzdálenost 8cm a je o 2cm větší než poloměr kružnice. Určete poloměr kružnice.



Řešení: Podle Pythagorovy věty platí:

$$r^2 = \left(\frac{r+2}{2}\right)^2 + 8^2$$

$$r^2 = \frac{r^2+4r+4}{4} + 64 \quad | \cdot 4$$

$$4r^2 = r^2 + 4r + 4 + 256$$

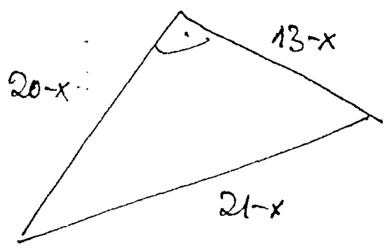
$$3r^2 - 4r - 260 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+3120}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{3136}}{6} = \frac{4 \pm 56}{6} = \begin{cases} 10\,(cm) \\ \cancel{-8\frac{2}{3}\,(cm)} \end{cases}$$

Kružnice má poloměr 10 cm.

(OA) **Příklad 32**: Velikosti stran daného △ jsou 13, 20 a 21. O jakou délku x je nutno zmenšit každou stranu, aby ze zkrácených stran bylo možno sestrojit pravoúhlý △?

Řešení: 13, 20, 21 nejsou délky stran pravoúhlého △. Proto musí platit:



$$(20-x)^2 + (13-x)^2 = (21-x)^2$$

$$400 - 40x + x^2 + 169 - 26x + x^2 = 441 - 42x + x^2$$

$$2x^2 - 66x + 569 = x^2 - 42x + 441$$

$$x^2 - 24x + 128 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 128}}{2} = \frac{24 \pm 8}{2} = \begin{cases} 16 \text{ nevyhovuje (strana je větší 13)} \\ 8 \end{cases}$$

Zkouška: 12, 5, 13, $12^2 + 5^2 = 13^2$

$169 = 169$

Každou stranu △ je třeba zmenšit o 8 (délkových jednotek).

Příklad 33 (OA): Dva závodníci jezdí na trati 5km dlouhé. První vyjíždí o 5 minut dříve než druhý a k cíli dojedou současně, protože druhý závodník ujede za hodinu o 3km více než první. Jaká je hodinová rychlost obou závodníků?

Řešení:

$s = 5\,km$ $\qquad 5\,min = \frac{5}{60}\,h = \frac{1}{12}\,h$

1. parník: $s = v\cdot\left(t + \frac{1}{12}\right)$, kde t je čas 2. parníku
v " rychlost 1. parníku
(lze i jinak)

$$\boxed{5 = v\left(t + \frac{1}{12}\right)} \quad \boxed{1}$$

2. parník: $s = (v+3)\cdot t$

$$\boxed{5 = (v+3)\cdot t} \Rightarrow \boxed{t = \frac{5}{v+3}} \quad \boxed{2}$$ dosaď do $\boxed{1}$

$$5 = v\left(\frac{5}{v+3} + \frac{1}{12}\right) \quad |:v$$

$$\frac{5}{v} = \frac{5}{v+3} + \frac{1}{12} \quad |\cdot 12v(v+3)$$

$$12\cdot 5\cdot(v+3) = 60v + v(v+3)$$

$$\cancel{60v} + 180 = \cancel{60v} + v^2 + 3v$$

$$v^2 + 3v - 180 = 0$$

$$v_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+720}}{2} = \frac{-3 \pm 27}{2} = \begin{cases} 12 \\ \cancel{-15} \end{cases}$$

$v = 12\,km/h$

$v + 3 = 15\,km/h$

Parníky jedou rychlostí $12\,km/h$ a $15\,km/h$.

Příklad 34 (OA): Plavec uplave na řece 480 m po proudu a 480 m proti proudu za 12 min 30 s. Rychlost plavce je 80 m/min. Jaká je rychlost proudu v této části řeky?

Řešení: Po proudu se rychlost plavce a rychlost proudu sčítají, proti se odečítají. Platí:

$t_1 = \frac{480}{80+v}$ ... čas po proudu $\qquad t_2 = \frac{480}{80-v}$ ... čas proti proudu

$$t_1 + t_2 = 12{,}5$$

$$\frac{480}{80+v} + \frac{480}{80-v} = 12{,}5 \quad |\cdot(80+v)\cdot(80-v)$$

$$480(80-v) + 480\cdot(80+v) = 12{,}5\cdot(6400 - v^2)$$

$$38400 - \cancel{480v} + 38400 + \cancel{480v} = 80000 - 12{,}5v^2$$

$$76800 = 80000 - 12{,}5v^2$$

$$12{,}5v^2 = 320$$

$$v^2 = 256$$

$$v_{1,2} = \pm 16$$

-16 nevyhovuje

$v_1 = 16$

Rychlost proudu je $16\,m/min$.

Příklad 35 (OA): Zvýší-li se rychlost vlaku o 9 km/h, ujede 180 km o 40 minut dříve než předtím. Za jak dlouho projede vlak tuto trať při původní rychlosti?

Řešení:

Původně: $s = v \cdot t$

$$180 = v \cdot t$$

$$\boxed{t = \frac{180}{v}} \quad \boxed{1} \text{ do } \boxed{2} \qquad \ldots \; 40\,\text{min} = \frac{2}{3}\,\text{h}$$

Nyní:

$$180 = (v+9) \cdot \left(t - \frac{2}{3}\right)$$

$$180 = (v+9) \cdot \left(\frac{180}{v} - \frac{2}{3}\right)$$

$$180 = (v+9) \cdot \frac{540 - 2v}{3v} \quad | \cdot 3v$$

$$540v = (v+9) \cdot (540 - 2v)$$

$$\cancel{540v} = \cancel{540v} - 2v^2 + 4860 - 18v$$

$$2v^2 + 18v - 4860 = 0 \quad | : 2$$

$$v^2 + 9v - 2430 = 0$$

$$v_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 9720}}{2} = \frac{-9 \pm 99}{2} = \begin{cases} 45 & \text{do } \boxed{2} \\ \cancel{-54} \end{cases}$$

$$t = \frac{180}{45} = 4\,(\text{h})$$

Vlak projede danou trať za 4 hodiny.

Příklady z dalších zdrojů

Příklad 36: Součet druhých mocnin tří přirozených čísel, z nichž každé následující je o 5 větší než předcházející, je o 6 menší než 13násobek součtu druhého a třetího čísla. Která čísla mají uvedené vlastnosti?

Řešení: $x + (x+5)^2 + (x+10)^2 + 6 = 13(x+5+x+10)$

$$x^2 + x^2 + 10x + 25 + x^2 + 20x + 100 + 6 = 13(2x+15)$$

$$3x^2 + 30x + 131 = 26x + 195$$

$$3x^2 + 4x - 64 = 0$$

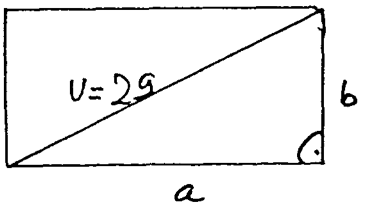
$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 768}}{6} = \frac{-4 \pm 28}{6} = \begin{cases} 4 \\ \cancel{-16} \end{cases}$$

Jde o čísla: $\boxed{4, 9, 14}$ Zkouška: $4^2 + 9^2 + 14^2 + 6 = 299$

$$13(9+14) = 299$$

Příklad 37: Obvod obdélníka je 82m, jeho úhlopříčka 29m. Vypočítejte jeho obsah.

Řešení:



$o = 82$

$(a+b) \cdot 2 = 82$

$a + b = 41$

$\boxed{a = 41 - b}$

$a^2 + b^2 = 29^2$

$(41-b)^2 + b^2 = 841$

$1681 - 82b + b^2 + b^2 = 841$

$2b^2 - 82b + 840 = 0 \quad | : 2$

$b^2 - 41b + 420 = 0$

$b_{1,2} = \dfrac{41 \pm \sqrt{1681 - 1680}}{2} = \dfrac{41 \pm \sqrt{1}}{2} = \dfrac{41 \pm 1}{2} = \begin{cases} 21 \\ 20 \end{cases}$

Rozměry jsou zaměnitelné.

$a = 41 - 21 = 20$

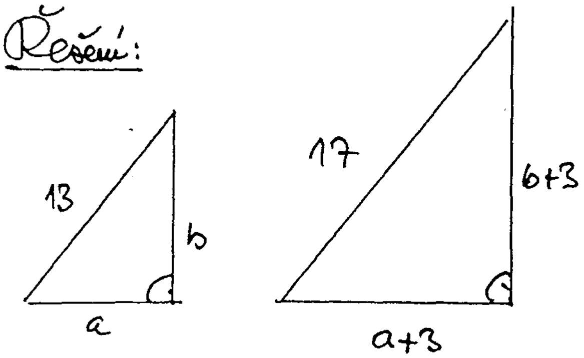
$a = 41 - 20 = 21$

$S = 20 \cdot 21 = 420 \ (m^2)$

Obdélník má obsah $420 \ m^2$.

Příklad 38: Přepona pravoúhlého △ má délku 13m. Jestliže délku každé odvěsny zvětšíme o 3m, tak se délka přepony zvětší o 4m. Určete délky odvěsen původního a upraveného trojúhelníku.

Řešení:



$a^2 + b^2 = 13^2$

$a^2 + b^2 = 169 \quad \boxed{1}$

$(a+3)^2 + (b+3)^2 = 17^2$

$\underbrace{a^2 + 6a + 9 + b^2}_{a^2 + b^2 = 169} + 6b + 9 = 289$

$169 + \underline{6a + 6b} + 18 = 289$

$6(a+b) = 102 \quad | : 6$

$a + b = 17$

$a = 17 - b \quad \boxed{2}$ dají do $\boxed{1}$

$a^2 + b^2 = 169$

$(17-b)^2 + b^2 = 169$

$289 - 34b + b^2 + b^2 = 169$

$2b^2 - 34b + 120 = 0 \quad | : 2$

$b^2 - 17b + 60 = 0$

$b_{1,2} = \dfrac{17 \pm \sqrt{17^2 - 240}}{2} = \dfrac{17 \pm 7}{2} = \begin{cases} 12 \\ 5 \end{cases}$ … $a_1 = 17 - 12 = 5$

$a_2 = 17 - 5 = 12$

Zkouška: Původní Δ: $a=12, b=5$ $12^2+5^2=169$

$13^2 = 169$

Upravený Δ $a' = 12+3=15, b'=5+3=8$

$15^2+8^2=289, 17^2=289$

Původní Δ: $a=12$ m, $b=5$ m.

Upravený Δ: $a'=15$ m, $b'=8$ m.

Příklad 39: Student si měl rozpočítat k maturitě 216 příkladů. Rozhodl se, že každý den vypočítá stejný počet úloh, což je jeho denní plán. Den však překročil o 3 úlohy. Kolik úloh měl denně podle plánu vypočítat? (a počet dnů tím zkrátil o 1.)

Řešení: $\frac{216}{x} - 1 = \frac{216}{x+3}$, kde x je počet úloh na 1 den podle plánu.

$$\frac{216-x}{x} = \frac{216}{x+3} \quad | \cdot x(x+3)$$

$$(216-x)(x+3) = 216x$$

$$\cancel{216x} - x^2 + 648 - 3x = \cancel{216x}$$

$$x^2 + 3x - 648 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+2592}}{2} = \frac{-3 \pm 51}{2} = \begin{cases} 24 \\ \cancel{-27} \end{cases}$$

Zkouška: $216 : 24 = 9$

$216 : 27 = 8$

Student měl denně vypočítat 24 úloh.

Příklad 40: Podlaha dílny má tvar obdélníka, jehož délka je o 6 m větší než šířka. Obsah podlahy je 17,55 a (arů). Určete délku a šířku podlahy.

$a - b = 6 \Rightarrow a = b+6$

$a \cdot b = 1755$

$(b+6) \cdot b = 1755$

$b^2 + 6b - 1755 = 0$

$$b_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+7020}}{2}$$

$$b_{1,2} = \frac{-6 \pm 84}{2} = \begin{cases} 39 \text{ (m)} \\ \cancel{-45} \end{cases}$$

$a = 39+6 = 45$

Zkouška: $S = 39 \cdot 45 = 1755$ (m^2)

Podlaha je dlouhá 45 m a široká 39 m.
