15 a) KVADRATICKÁ ROVNICE. VLASTNOSTI KOŘENŮ

Definice: Rovnice $\boxed{ax^2+bx+c=0}$, kde $\underbrace{a,b,c\in R,\ a\neq 0}_{\text{nebo}}$, se nazývá <u>kvadratická rovnice</u>.

$\boxed{a\in R-\{0\},\ b,c\in R}$

ax^2 je její kvadratický člen,

bx " " lineární " ,

c " " absolutní " .

Výraz $\boxed{ax^2+bx+c}$, kde $a,b,c\in R$, $a\neq 0$ se nazývá <u>kvadratický trojčlen</u>.

Neúplná kvadratická rovnice

je taková, ve které některý z koeficientů b,c je nulový.

1) Kvadratická rovnice bez absolutního členu

$\boxed{ax^2+bx=0}$ $(a,b\in R,\ a\neq 0)$ ... $\boxed{x_1=0,\ x_2=-\frac{b}{a}}$

Příklad 1: ve kterém řešení provedeme úpravou na tvar

$ax^2+bx=0$

$x(ax+b)=0$

$x_1=0$

$x_2:\ ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$

Řešte rovnice:

a) $4x^2+8x=0 \quad |:4$

$x^2+2x=0$

$x\cdot(x+2)=0$

$\boxed{x_1=0}$

$x+2=0$ ... $\boxed{x_2=-2}$

Zkouška: pro

$x_1=0$ ... $L=4\cdot 0^2+8\cdot 0=0$

$P=0$

$L=P$

$x_2=-2$

$L=4\cdot(-2)^2+8\cdot(-2)=$

$=16-16=0$

$L=P$

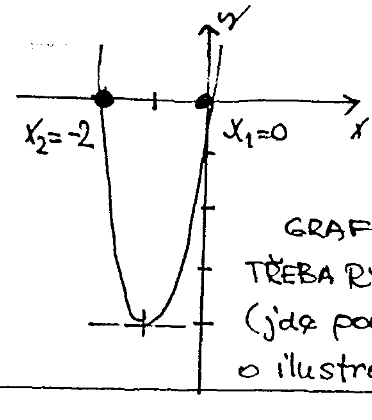
b) Řešte bez úpravy:

$5x^2-20x=0$, kde $a=5$, $b=-20$

$x_1=0$

$x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-20}{5}=4$

$\boxed{x_1=0,\ x_2=4}$ nebo $K=\{0;4\}$



GRAF NENÍ TŘEBA RÝSOVAT (jde pouze o ilustraci).

c) $\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{8}m = 0$ lze řešit několika postupy:

1. postup: $\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{8}m = 0 \quad |\cdot 8$

$2m^2 - m = 0$

$m(2m-1) = 0 \Rightarrow \boxed{m_1 = 0}$

$2m - 1 = 0$

$\boxed{m_2 = \frac{1}{2}}$

---

2. postup: $\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{8}m = 0$

$m\left(\frac{1}{4}m - \frac{1}{8}\right) = 0 \quad \boxed{m_1 = 0}$

$\frac{1}{4}m - \frac{1}{8} = 0 \quad |\cdot 8$

$2m - 1 = 0$

$\boxed{m_2 = -\frac{1}{2}} \qquad K = \{0; -\frac{1}{2}\}$

---

3. postup (řešíme pomocí vzorců)

$\underbrace{\frac{1}{4}}_{a}m^2 - \underbrace{\frac{1}{8}}_{b}m \qquad \boxed{m_1 = 0}$

$m_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}, \quad \boxed{m_2 = -\frac{1}{2}}$

---

d) $\frac{2}{5}y^2 - \frac{4}{5}y \quad \dots y_1 = 0, \; y_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}} = 2 \qquad [0; 2], \; K = \{0; 2\}$

---

e) $\frac{9}{2}x^2 = 9x$

$\frac{9}{2}x^2 - 9x = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = -\frac{-9}{\frac{9}{2}}$

$x_2 = 2$

$K = \{0; 2\}$

f) $z^2 + 6z = -4z^2 + 8z$

$5z^2 - 2z = 0$

$z_1 = 0$

$z_2 = -\frac{-2}{5}$

$z_2 = \frac{2}{5}$

$K = \{0; \frac{2}{5}\}$ nebo

$K = \{0; 0{,}4\}$

Zkouška:

pro $z = 0$: $L = 0^2 + 6\cdot 0 = 0$

$P = -4\cdot 0^2 + 8\cdot 0 = 0$

$L = P$

pro $z = 0{,}4$: $L = 0{,}4^2 + 6\cdot 0{,}4 = 2{,}56$

$P = -4\cdot 0{,}4^2 + 8\cdot 0{,}4 = 2{,}56$

$L = P$

---

g) $3u = \sqrt{2}u^2 + u$

$\sqrt{2}u^2 - 2u = 0$

$u(u\sqrt{2} - 2) = 0 \rightarrow u_1 = 0$

$u\sqrt{2} - 2 = 0$

$u\sqrt{2} = 2 \rightarrow u = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$K = \{0; \sqrt{2}\}$

---

2) Ryze kvadratická rovnice

Je-li $b=0$, má rovnice tvar $\boxed{ax^2+c=0}$ a nazývá se ryze kvadratická. Platí:

$$ax^2=-c$$

$$x^2=-\frac{c}{a}$$

$$\boxed{x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}}$$

Je-li $-\frac{c}{a}>0$, má rovnice 2 řešení.

Je-li $-\frac{c}{a}=0$, má jedno řešení (dvojnásobný kořen).

Je-li $-\frac{c}{a}<0$, nemá žádné řešení.

Příklad 2.

a) $25x^2-1=0$

$25x^2=1$

$x^2=\frac{1}{25}$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{25}}=\left\langle \begin{matrix}\frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5}\end{matrix}\right.$

$K=\left\{\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}\right\}$

$16x^2+4=0 \quad |:4$

$4x^2+1=0$

$4x^2=-1$

$x^2=-\frac{1}{4}$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{1}{4}}$ Tato rovnice nemá žádné řešení.

Příklad 3: Řešte $\overset{a}{4{,}5}x^2-\overset{c}{18}=0$

1) pomocí vzorce $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{-18}{4{,}5}}=\pm\sqrt{\frac{18}{4{,}5}}=\pm\sqrt{4}=\left\langle \begin{matrix}\boxed{x_1=2}\\ \boxed{x_2=-2}\end{matrix}\right.$

2) bez vzorce

$4{,}5x^2-18=0 \quad |:4{,}5$

$x^2-4=0$

$x^2=4$ nebo $|x^2|=4$

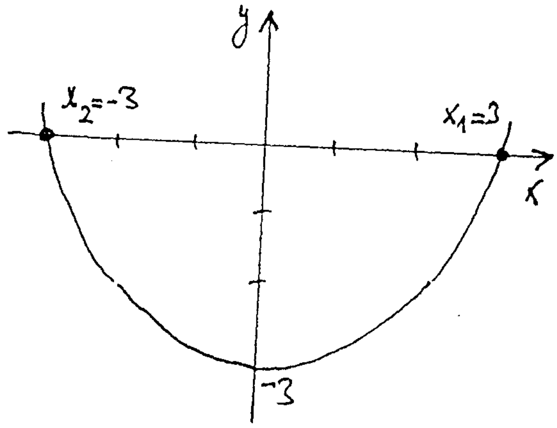
$x_{1,2}=\pm\sqrt{4}=\left\langle \begin{matrix}x_1=2\\ x_2=-2\end{matrix}\right.$ $K=\{-2, 2\}$

Příklad 4a)

$\frac{1}{3}x^2-3=0 \quad |\cdot 3$

$x^2=9$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{9}=\left\langle \begin{matrix}x_1=3\\ x_2=-3\end{matrix}\right.$



b)

$4{,}5x^2-18=0$

1. způsob řešení:

$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{-18}{4{,}5}}=\pm\sqrt{4}=\boxed{\left\langle \begin{matrix}x_1=2\\ x_2=-2\end{matrix}\right.}$

2. způsob:

$4{,}5x^2-18=0 \quad |:4{,}5$

$x^2-4=0$

$(x+2).(x-2)=0$

$x+2=0 \quad \vee \quad x-2=0$

$\boxed{x_1=-2 \qquad x_2=2}$ $\quad K=\{-2; 2\}$

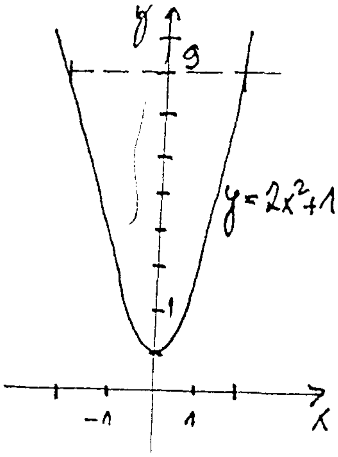
Príklad 5:

a) $2x^2+1=0 \quad |:2$

$x^2+\frac{1}{2}=0$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}}$

Rovnice nemá v obore R řešení.



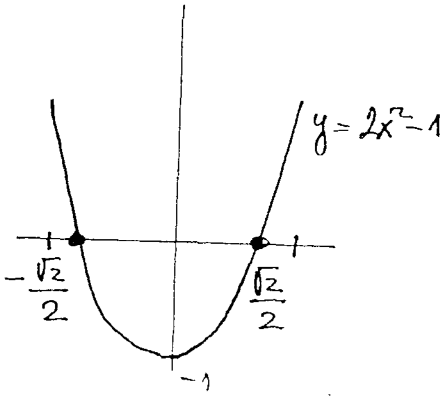
Neexistuje průsečík grafu funkce $y=2x^2+1$ s osou x.

b) $2x^2-1=0 \quad |:2$

$x^2-\frac{1}{2}=0$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\boxed{x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \boxed{x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\qquad \frac{\sqrt{2}}{2}\doteq 0{,}7$



c) $x^2+159=28^2$

$x^2+159=784$

$x^2=625$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{625}=$ $\boxed{x_1=25}$, $\boxed{x_2=-25}$

d) $100x^2-16=0$

1. způsob řešení:

$(10x+4)\cdot(10x-4)=0$

$10x+4=0 \quad \vee \quad 10x-4=0$

$10x=-4 \qquad 10x=4$

$\underbrace{\boxed{x=-\frac{2}{5}} \qquad \boxed{x=\frac{2}{5}}}$

Le řeš. ~~p~~ p. ~~A~~:

$K=\left\{-\frac{2}{5};\ \frac{2}{5}\right\}$

2. způsob řešení:

$100x^2-16=0$ nebo děl 4:

$100x^2=16$

$x^2=\frac{16}{100}$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{16}{100}}$

$x_{1,2}=\pm\frac{4}{10}=\boxed{\pm\frac{2}{5}}$

$25x^2-4=0$

$25x^2=4$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{4}{25}}$

$x_{1,2}=\pm\frac{2}{5}$

Příklad 6:

a) $\frac{7}{x+4}+x=4 \quad |\cdot(x+4);\ x\neq-4$

$7+x(x+4)=4(x+4)$

$7+x^2+\cancel{4x}=\cancel{4x}+16$

$x^2=9$

$\boxed{x_{1,2}=\pm3}$

b) $x^2=0{,}49$

$x_{1,2}=\pm0{,}7$

c) $\frac{x^2-16}{x+1}=0 \quad |\cdot(x+1);\ x\neq-1$

$x^2-16=0$

$x_{1,2}=\pm4$

d) $4x^2=9$

$x^2=\frac{9}{4}$

$x_{1,2}=\pm\frac{3}{2}$

3) Obecná kvadratická rovnice

$\boxed{ax^2+bx+c=0}$, kde $a, b, c \neq 0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \quad D=b^2-4ac$$

Je-li $D>0$, pak $K=\left\{\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right\}$.

Je-li $D=0$, pak $K=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

Je-li $D<0$, pak $K=\emptyset$.

Příklad 7:

a) $x^2-3x-10=0$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{3\pm7}{2}=\begin{cases}x_1=5\\ x_2=2\end{cases} \quad \boxed{K=\{2;5\}}$$

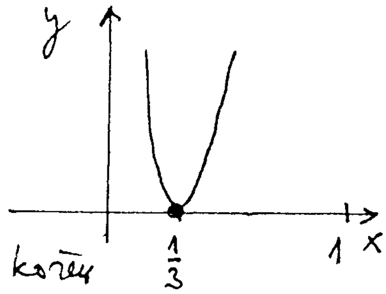
---

b) $9x^2-6x+1=0$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{18}=\frac{6\pm0}{18}=\frac{1}{3}\ ; \ K=\left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$\downarrow$

dvojnásobný kořen



---

c) $3x^2-2x+4=0$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-48}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{-44}}{6}\ ; \ \boxed{K=\emptyset}$$

graf funkce $y=3x^2-2x+4$ neprotíná osu x.

---

d) $(x-3)\cdot(x-0{,}3)=0$; podle textu na str. 10 lze určit výsledné kořeny přímo ... $K=\{0{,}3;3\}$. Prozatím musíme provést vynásobení dvojčlenů.

$(x-3)(x-0{,}3)=0$

$x^2-3x-0{,}3x+0{,}9=0$

$x^2-3{,}3x+0{,}9=0 \quad |\cdot10$

$10x^2-33x+9=0$

$$x_{1,2}=\frac{33\pm\sqrt{33^2-360}}{20}=\frac{33\pm27}{20}=\begin{cases}x_1=3\\ x_2=0{,}3\end{cases}$$

$\boxed{K=\{0{,}3;3\}}$

---

d) $\dfrac{3x^2+6x}{2} = 4-2x \quad | \cdot 2$

$3x^2+6x = 8-4x$

$3x^2+10x-8=0$

$x_{1,2} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100+96}}{6} = \dfrac{-10 \pm 14}{6}$

$x_{1,2} = \left\langle \begin{array}{l} -4 \\ -\frac{2}{3} \end{array} \right.$

$\boxed{K = \{+\tfrac{2}{3}; -4\}}$

e) $2x(x-3)+4(x-3)=0$

$2x^2-6x+4x-12=0$

$2x^2-2x-12=0 \quad | : 2$

$x^2-x-6=0$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{array} \right.$

$\boxed{K = \{-2; 3\}}$

f) $(a+3)^2+(a+4)^2=(a+5)^2$

$a^2+6a+9+\cancel{a^2}+8a+16=\cancel{a^2}+10a+25$

$a^2+4a=0$, což je kvadr. rovnice bez absolutního členu.

$a(a+4)=0$

$a_1=0,\ a_2=-4$

$\boxed{K=\{0; -4\}}$

g) $\sqrt{x}+x=2$

$\sqrt{x}=2-x$, umocníme

$(\sqrt{x})^2=(2-x)^2$

$x=4-4x+x^2$

$x^2-5x+4=0$

$x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}$

$x_{1,2}=\dfrac{5\pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 4 \\ 1 \end{array} \right.$

Zkouška je nutná, protože umocňování obou stran rovnic není ekvivalentní úprava.

$L(4)=\sqrt{4}+4=2+4=6$

$P(4)=2$, $L \neq P \Rightarrow 4 \notin K$

$L(1)=\sqrt{1}+1=1+1=2$

$P(1)=2$

$L=P \Rightarrow 1 \in K$

Výsledek: $\boxed{K=\{1\}}$

h) Pro které hodnoty x nabývá funkce $y=-x^2-3x+18$ hodnotu $y=0$?

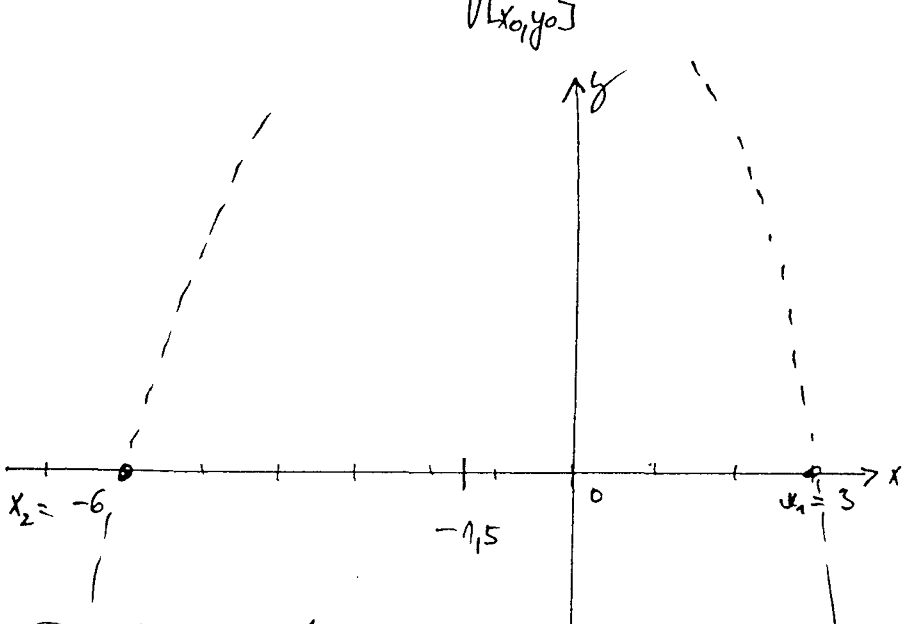
Řešení

$-x^2-3x+18=0 \quad | \cdot (-1)$

$x^2+3x-18=0$

$x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+72}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{81}}{2}$

$\boxed{x_1=3,\ x_2=-6}$ viz graf na Sh. 6



Doplňková informace:

Pro souřadnice vrcholu V paraboly platí:

V[x0, y0], kde

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2(-1)} = -1,5 \qquad \underbrace{-1x^2}_{a=-1}\ \underbrace{-3x}_{b=-3}\ \underbrace{+18}_{c=18}$$

$$y_0 = c - \frac{b^2}{4a} = 18 - \frac{(-3)^2}{4\cdot(-1)} = 18 - \frac{9}{-4} = 20\tfrac{1}{4} \qquad V[-1,5;\ 20\tfrac{1}{4}]$$

Daná funkce nabývá nulovou hodnotu pro $x_1 = 3$ a $x_2 = -6$

Př. 8: Kvadratická rovnice s neznámou ve jmenovateli:

$$\frac{18}{4x^2-9} - \frac{1}{3-2x} = \frac{2x}{2x+3}$$

$$\frac{18}{(2x+3)\cdot(2x-3)} + \frac{1}{2x-3} = \frac{2x}{2x+3} \qquad \Big| \cdot (2x+3)\cdot(2x-3)$$

Podmínka:

$2x+3=0 \ \vee \ 2x-3=0$

$2x=-3 \qquad 2x=3$

$\boxed{x=-1,5 \qquad x=1,5}$

Pokud dostaneme tento výsledek řešení, tak ho odmítneme jako nevyhovující.

$$18 + 1(2x+3) = 2x(2x-3)$$

$$18 + 2x + 3 = 4x^2 - 6x$$

$$4x^2 - 8x - 21 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64+336}}{8} = \frac{8 \pm \sqrt{400}}{8} = \frac{8 \pm 20}{8} = \begin{cases} 3,5 \\ -1,5 \ \text{nevyhovuje} \end{cases}$$

Zkouška: $L(3,5) = \frac{18}{4\cdot 3,5^2 - 9} = \frac{7}{10}$, $P(3,5) = \frac{2\cdot 3,5}{2\cdot 3,5 + 3} = \frac{7}{10}$, $L=P$ $\boxed{K=\{3,5\}}$

Příklad 9: $x^4-4x^2+3=0$

Substituce: $y=x^2$

$y^2-4y+3=0$

$y_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}$

$y_{1,2}=\dfrac{4\pm2}{2}=\begin{cases} y_1=3\\ y_2=1\end{cases}$

Zpět: $3=x^2$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{3}=\begin{cases} x_1=-\sqrt{3}\\ x_2=\sqrt{3}\end{cases}$

$1=x^2$

$x_{3,4}=\pm\sqrt{1}=\begin{cases} x_3=1\\ x_4=-1\end{cases}$

$\boxed{K=\{-\sqrt{3},-1,1,\sqrt{3}\}}$

Úloha má 4 řešení.

Obecnou kvadratickou rovnici $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ lze upravit na tvar

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Označíme-li $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$, dostaneme rovnici tvaru

$$\boxed{x^2+px+q=0},$$

který se nazývá normovaný tvar kvadrat. rovnice. Má-li tato rovnice kořeny x_1, x_2, pak pro ně platí:

$$\boxed{x_1+x_2=-p} \quad \boxed{x_1\cdot x_2=q}$$

a můžeme ji zapsat

$$\boxed{(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0}$$

Dodatek na str. 9

Příklad 10: Zapište rovnici $5x^2-3x+10$ v normovaném tvaru.

Řešení: $5x^2-3x+10=0 \quad |:5$

$\boxed{x^2-\frac{3}{5}x+2=0}$ nebo $\boxed{x^2-0{,}6x+2=0}$

Příklad 11: Sestavte kvadr. rovnici s kořeny $x_1=3$, $x_2=-\frac{1}{2}$.

Řešení:

$(x-3)\cdot(x+\frac{1}{2})=0$

$x^2-3x+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0 \quad |\cdot2$

$2x^2-6x+x-3=0$

$\boxed{2x^2-5x-3=0}$

Dodatek: Rovnice $\boxed{ax^2+bx+c = a(x-x_1)\cdot(x-x_2)}$ I.

Je-li $a=1$, pak

$\boxed{x^2+bx+c = (x-x_1)\cdot(x-x_2)}$ II.

Dále platí: $\boxed{x_1+x_2 = -\frac{b}{a}}$ $\boxed{x_1\cdot x_2 = \frac{c}{a}}$ III.

Příklad 12: a) Určete rovnici tvaru $x^2+bx+c=0$, je-li $x_1=1$, $x_2=-1$

Řešení: $(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$

$(x-1)\cdot(x+1)=0$

$\boxed{x^2-1=0}$

b) Pro $x_1=3$, $x_2=-7$ platí: $(x-3)\cdot(x+7)=0$ (obracej ⊕ na ⊖ a opačně)

$x^2-3x+7x-21=0 \Rightarrow \boxed{x^2+4x-21=0}$

Příklad 13: Napište kvadr. rovnici, pro kterou platí:

$ax^2+bx+2=0$, $x_1=\frac{3}{4}$, $x_2=-\frac{1}{5}$

Řešení: $x_1\cdot x_2 = \frac{c}{a}$ $\qquad$ $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

$\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{a}$ $\qquad$ $\frac{3}{4}-\frac{1}{5}=-\frac{b}{-\frac{40}{3}}$

$\frac{2}{a}=-\frac{3}{20}$ $\qquad$ $\frac{11}{20}=\frac{3b}{40}$ $\mid\cdot 40$

$-3a=40$ $\qquad$ $22=3b$

$\boxed{a=-\frac{40}{3}}$ $\qquad$ $\boxed{b=\frac{22}{3}}$ a bylo dáno $\boxed{c=2}$

$ax^2+bx+2=0$

$-\frac{40}{3}x^2+\frac{22}{3}x+2=0 \mid\cdot 3$

$-40x^2+22x+6=0 \mid :(-2)$ $\rightarrow$ $\boxed{20x^2-11x-3=0}$

Příklad 14: Určete $ax^2+3x+c=0$, kde $a,c,x\in\mathbb{R}$, aby

jejím jediným kořenem bylo číslo 2.

Řešení: Známe $b=3 \rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a} \rightarrow 2+2=-\frac{3}{a} \rightarrow \boxed{a=-\frac{3}{4}}$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$2 \cdot 2 = \frac{c}{-\frac{3}{4}}$$

$$-\frac{4c}{3} = 4$$

$$-4c = 12 \quad |:(-4)$$

$$\boxed{c = -3}$$

$$ax^2 + 3x + c = 0$$

$$-\frac{3}{4}x^2 + 3x - 3 = 0 \quad |\cdot(-4)$$

$$3x^2 - 12x + 12 = 0 \quad |:3$$

$$\boxed{x^2 - 4x + 4 = 0}$$

Výraz ax^2+bx+c se nazývá **KVADRATICKÝ TROJČLEN**. Tento trojčlen lze rozložit na součin lineárních činitelů.

Příklad 15: Rozložte na součiny kvadratické trojčleny:

a) $x^2 - 6x + 8$

Postup při řešení:

1) $x^2 - 6x + 8 = 0$; tuto kvadr. rovnici můžeme vyřešit dvěma postupy (stačí použít jeden z nich).

1. postup:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{zpaměti:} \\ x_1 = 4,\ x_2 = 2 \end{array}$$

2. postup:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{array} \right.$$

2) Výsledek: $\boxed{x^2 - 6x + 8 = \underbrace{(x-2)\cdot(x-4)}_{\text{je součin lineárních činitelů}}}$

---

b) $x^2 - 13x + 42$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 168}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{13 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 7 \\ 6 \end{array} \right.$$

$$\boxed{x^2 - 13x + 42 = (x-6)\cdot(x-7)}$$

---

c) $6x^2 - 7x + 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{12}$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{12} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Podle I. nash. 9 platí:

$$\boxed{6x^2 - 7x + 2 = \boxed{6\left(x - \frac{2}{3}\right)\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)}}$$

napíše se hodnota $a = 6$

Příklad 16: Zjednodušte lomený výraz $\dfrac{x^2+7x+6}{3x^2+5x+2}$.

Řešení: $x^2+7x+6=0$

$$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49-24}}{2}=\frac{-7\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-7\pm5}{2}=\begin{cases}-6\\-1\end{cases}$$

$3x^2+5x+2=0$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{6}=\frac{-5\pm\sqrt{1}}{6}=\frac{-5\pm1}{6}=\begin{cases}-1\\-\frac{2}{3}\end{cases}$$

$$\frac{x^2+7x+6}{3x^2+5x+2}=\frac{(x+6)\cdot\cancel{(x+1)}}{\underbrace{3\cancel{(x+1)}\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)}_{\text{podle I.}}}=\frac{x+6}{3\left(x+\frac{2}{3}\right)}=\boxed{\frac{x+6}{3x+2}}$$

s podmínkami: $x\neq-1,\ x\neq-\frac{2}{3}$

Příklad 17: Zjednodušte $\dfrac{4x^2+7x-2}{12x^2+5x-2}$.

Řešení: $4x^2+7x-2=0$

$$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+32}}{8}=\frac{-7\pm\sqrt{81}}{8}=\frac{-7\pm9}{8}=\begin{cases}\frac{1}{4}\\-2\end{cases}$$

$12x^2+5x-2=0$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+96}}{24}=\frac{-5\pm\sqrt{121}}{24}=\frac{-5\pm11}{24}=\begin{cases}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$\frac{4x^2+7x-2}{12x^2+5x-2}=\frac{4\cancel{\left(x-\frac{1}{4}\right)}\cdot(x+2)}{12\cancel{\left(x-\frac{1}{4}\right)}\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)}=\frac{1\ (x+2)}{3\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)}=\boxed{\frac{x+2}{3x+2}}$$

Podmínky: $x\neq\frac{1}{4},\ x\neq-\frac{2}{3}$

Další řešené příklady

Příklad 18: Pro které hodnoty t má rovnice $4x^2-(t-4)x+1=0$ 1, 2, nebo žádné řešení?

Řešení: $D=(t-4)^2-16 \rightarrow t^2-8t+16-16 \rightarrow t^2-8t \ldots D=t^2-8t$

1 řešení bude pro $D=0$

$t^2-8t=0$

$t(t-8)=0$

$\boxed{t=0 \vee t=8}$

1 řešení bude mít v případě, že $t=0$, $t=8$.

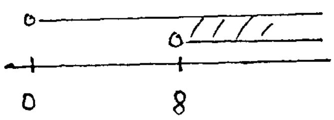
2 řešení budou pro $D>0$

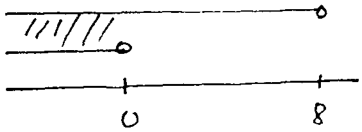
$t^2-8t>0$

$t(t-8)>0$, to nastane v případě že

$(t>0 \wedge t-8>0) \vee (t<0 \wedge t-8<0)$

$(t>0 \wedge t>8) \vee t<0 \wedge t<8$





$$\underbrace{t\in(8;+\infty) \qquad t\in(-\infty;0)}$$

$\boxed{t\in(-\infty;0)\cup(8;+\infty)}$ ... 2 řešení

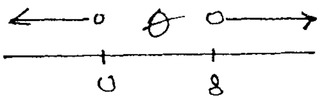
Žádné řešení pro $D<0$.

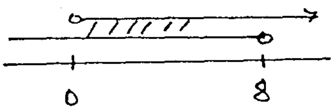
$t^2-8t<0$

$t(t-8)<0$, to nastane v případě, že

$(t<0 \wedge t-8>0) \vee (t>0 \wedge t-8<0)$

$(t<0 \wedge \cancel{t}>8) \vee (t>0 \wedge <t<8$





$\boxed{t\in(0;8)}$ Žádné řešení

Příklad 20: Napište kvadratickou rovnici, víte-li, že $x_1=3$, $x_2=-7$, $a=1$

Řešení: 1. způsob:

$(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$

$(x-3)\cdot(x+7)=0$

$x^2-3x+7x-21=0$

$\boxed{x^2+4x-21=0}$

2. způsob:

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ $\qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

$3-7=-\frac{b}{1}$ $\qquad 3\cdot(-7)=\frac{c}{1}$

$-4=-b$ $\qquad \boxed{c=-21}$

$\boxed{b=4}$ $\qquad a=1$ je dáno

$ax^2+bx+c=0$

$\boxed{x^2+4x-21=0}$

Příklad 21: V rovnici $x^2-6x+q=0$ určete q tak, aby jeden její kořen byl 7.

Řešení:

$$x^2-6x+q=0$$
$$7^2-6.7+q=0$$
$$49-42+q=0$$
$$\boxed{q=-7}$$

Zkouška: $x^2-6x-7=0$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36+28}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{6\pm 8}{2}=\left\langle\begin{matrix}7\\-1\end{matrix}\right.$$

Příklad 22: Rozložte kvadr. trojčlen na součin lineárních činitelů, je-li $x^2-42x-759$.

$$x^2-42x-759=0$$
$$x_{1,2}=\frac{42\pm\sqrt{42^2+4.759}}{2}=\frac{42\pm\sqrt{4800}}{2}=\frac{42\pm\sqrt{1600.3}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{42\pm 40.\sqrt{3}}{2}=21\pm 20.\sqrt{3}=\left\langle\begin{matrix}21+20\sqrt{3}\\21-20\sqrt{3}\end{matrix}\right.$$
$$\boxed{x^2-42x-759}=(x+21+20\sqrt{3}).[x-(21-20\sqrt{3})=\boxed{(x+21+20\sqrt{3}).(x-21+20\sqrt{3})}$$

Příklad 23. Rovnice $x^2+px-18=0$ má jeden kořen roven -9. Určete druhý kořen a koeficient p.

Řešení:

$$x_1+x_2=-p$$
$$x_1.x_2=q$$
$$-9.x_2=-18$$
$$\boxed{x_2=2}$$

$$-9+2=-p$$
$$\boxed{p=7}$$

Zkouška:

$$x^2+7x-18=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{121}}{2}=\left\langle\begin{matrix}2\\-9\end{matrix}\right.$$

Příklad 24: $7x-1=x^2-x$

Řešení:

$$x^2-8x+1=0$$
$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-4}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{60}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{4.15}}{2}=\frac{8\pm 2\sqrt{15}}{2}=$$
$$=4\pm\sqrt{15}=\boxed{\left\langle\begin{matrix}4+\sqrt{15}\\4-\sqrt{15}\end{matrix}\right.}$$

Příklad 25: Rozložte kvadratické trojčleny:

a) $x^2 - 9x - 22$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81+88}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{9 \pm 13}{2} = \begin{cases} 11 \\ -2 \end{cases}$$

$$x^2 - 9x - 22 = (x+2)\cdot(x-1)$$

---

b) $2x^2 - 5x + 2$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\boxed{2x^2 - 5x + 2 = 2\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot(x-2)}$ nebo provedeme další možné úpravy

$\boxed{2x^2 - 5x + 2 = (2x-1)\cdot(x-2)}$

$\boxed{2x^2 - 5x + 2} = 2(x-2)\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right) = \boxed{(2x-4)\cdot(x-0{,}5)}$

Poznámka: Obdobně bylo možné uvést více variant výsledků, např. je př. 15c na str. 10.

---

c) $4x^2 + 12x - 216$

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144+3456}}{8} = \frac{-12 \pm \sqrt{3600}}{8} = \frac{-12 \pm 60}{8} = \begin{cases} 6 \\ -9 \end{cases}$$

$\boxed{4x^2 + 12x - 216 = 4(x-6)(x+9)}$, nebo

$\boxed{4x^2 + 12x - 216 = (4x-24)\cdot(x+9)}$ nebo

$\boxed{4x^2 + 12x - 216 = (x-6)\cdot(4x+36)}$