REKURENTNÍ URČENÍ P-TÍ

Př. 1 $\left(\log 3^n\right)_{n=1}^{\infty} = (a_n)$ Vyjádři p-t rekur.

- určíme a_1 $n=1 \Rightarrow$ $\underline{a_1 = \log 3}$
- určíme a_{n+1} $a_{n+1} = \log 3^{n+1}$
- vyjádříme vztah mezi a_{n+1} a a_n

$$\underbrace{\log\left(3^{n+1}\right)}_{a_{n+1}} = \log\left(3^n \cdot 3\right) = \underbrace{\log 3^n}_{a_n} + \log 3$$

$$\underline{\underline{a_1 = \log 3 \qquad a_{n+1} = a_n + \log 3}}$$

Př. 2. $a_1 = 1$ $a_{n+1} = 2a_n$ Vyjádři p-t vzorcem pro n-tý člen

$\Rightarrow\ ? = a_n = ?$

$a_2 = 2a_1 = 2$

$a_3 = 2a_2 = 4$

$a_4 = 2a_3 = 8$

$\vdots$

$a_n = 2a_{n-1}$

$n=1$ $n=2$

1, 2, 4, 8, 16, ...

2^1 2^2 2^3 2^4 $\Rightarrow$ lze odvodit $\left(2^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$

$a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot 2^{n-1}$

$a_n = a_1 \cdot 2^{n-1} = \underline{\underline{2^{n-1}}}$

16/7 najdi prvních 5 členů p-ti určení rekurentně

a) $a_1 = 2 \quad a_{n+1} = 3a_n \quad n \in N$

$a_2 = 3a_1 = 6 \qquad a_4 = 3a_3 = 54$

$a_3 = 3a_2 = 18 \qquad a_5 = 3a_4 = 162$

b) $a_1 = 1 \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$

$$a_2 = \frac{1}{1+a_1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$a_3 = \frac{1}{1+a_2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

$$a_4 = \frac{1}{1+a_3} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}$$

$$a_5 = \frac{1}{1+a_4} = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \underline{\underline{\frac{5}{8}}}$$

c) $a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

$n=1$: $a_3 = a_2 - a_1 = \underline{\underline{0}} \qquad a_5 = a_4 - a_3 = \underline{\underline{-1}}$

$a_4 = a_3 - a_2 = \underline{\underline{-1}}$

d) $a_1 = 0 \quad a_2 = 1 \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n$

$n=1$: $a_3 = 2a_2 - 3a_1 = 2.1 - 3.0 = \underline{\underline{2}}$

$a_4 = 2a_3 - 3a_2 = 4 - 3 = \underline{\underline{1}}$

$a_5 = 2a_4 - 3a_3 = 2 - 6 = \underline{\underline{-4}}$

16/8 Určete první člen p-ti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí $a_4 = 7$ $\quad a_{n+1} = a_n - 3$

$$a_4 = a_3 - 3 \Rightarrow a_3 = a_4 + 3 = 10$$
$$a_3 = a_2 - 3 \Rightarrow a_2 = a_3 + 3 = 13$$
$$a_2 = a_1 - 3 \Rightarrow a_1 = a_2 + 3 = \underline{\underline{16}}$$

16/9 P-ti určení ~~rekurentně~~ vzorcem pro n-tý člen určete rekurentně

a) $(1)_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_1 = 1$ – jedná se o konstantní p-t

$$\underline{\underline{a_{n+1} = a_n}}$$

b) $(n)_{n=1}^{\infty}$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= \underbrace{n}_{a_n} + 1 \end{aligned} \right\} \quad \underline{\underline{\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= a_n + 1 \end{aligned}}}$$

c) $(\log_2 10^n)_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_1 = \log_2 10$

$$a_{n+1} = \log_2 10^{n+1} = \log_2(10^n \cdot 10) = \underbrace{\log_2 10^n}_{a_n} + \log_2 10$$

$$\underline{\underline{a_1 = \log_2 10 \quad a_{n+1} = a_n + \log_2 10}}$$

d) $\left\{ n(n+1) \right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_1 = 2$

vynásobením $\frac{n}{n}$ se původní výraz nezmění

$$a_{n+1} = \underbrace{(n+1)(n+2) \cdot n}_{a_n} \cdot \frac{}{n} =$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{(n+2)}{n} \qquad a_1 = 2$$

e) $\left(\frac{n}{n+1} \right)_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+1+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n}{n} \qquad \frac{1}{a_n}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \cdot \frac{n}{(n+2)} \qquad a_1 = \frac{1}{2}$$

Zap.

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \overset{=1}{\frac{n}{n}} \cdot \overset{=1}{\frac{n+1}{n+1}} \qquad a_n$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \qquad a_1 = \frac{1}{2}$$

f) $\left(\frac{n+1}{n} \right)_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_1 = \frac{1+1}{1} = 2$

$$a_{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n+1} \qquad a_n$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \qquad a_1 = 2$$

16/10 Po-ti zadané rekurentně vyjádřete vzorcem pro n-tý člen

a) $a_1 = 1$

$a_{n+1} = a_n \Rightarrow$ konstantní p-t, lze přímo psát výsledek

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1)_{n=1}^{\infty}$$

b) $a_1 = 1$

$a_{n+1} = -a_n$

$$(a_n) = \left\{(-1)^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$a_2 = -a_1 = -1$

$a_3 = -a_2 = a_1 = 1$

$a_4 = -a_3 = -a_1 = -1$

$\vdots$

$a_n = -a_{n-1} = (-1)^{n-1}$ nebo $(-1)^{n+1}$

– pro sudé n vyjde vždy -1

– pro liché n vyjde vždy 1

Př. 1. napiš první 4 členy p-ti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dané vzorcem pro n-tý člen

a) $a_n = 2n-3$

$a_1 = 2\cdot1-3 = \underline{\underline{-1}}$ $a_2 = 2\cdot2-3 = \underline{\underline{1}}$ $a_3 = 2\cdot3-3 = \underline{\underline{3}}$ $a_4 = 2\cdot4-3 = \underline{\underline{5}}$

b) $a_n = 2^n - n$

$a_1 = 2^1 - 1 = \underline{\underline{1}}$ $a_2 = 2^2 - 2 = \underline{\underline{2}}$ $a_3 = 2^3 - 3 = \underline{\underline{5}}$ $a_4 = 2^4 - 4 = \underline{\underline{12}}$

Př. 2. urči první 4 členy p-ti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ určené rekurentně:

a) $a_1 = 1$ $a_2 = -2$ $a_{n+1} = -2a_n + a_{n-1}$

pro $n=1$: bychom dostali v posledním členu a_0 což neexist.

takže pro $n=2$: $a_3 = -2a_2 + a_1 = -2\cdot(-2)+1 = \underline{\underline{5}}$

$a_4 = -2a_3 + a_2 = -2\cdot5 + (-2) = \underline{\underline{-12}}$

b) $a_3 = 0$ $a_4 = -3$ $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$

pro $n=3$: $a_4 = a_3 + 2a_2 \Rightarrow -3 = 0 + 2a_2 \Rightarrow a_2 = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$

pro $n=2$: $a_3 = a_2 + 2a_1 \Rightarrow 0 = -\frac{3}{2} + 2a_1 \Rightarrow a_1 = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$

Př. 3. Danou p-k vyjádři rekurentně:

a) $(3^n)_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_1 = 3^1 = 3$

$$a_{n+1} = 3^{n+1} = \underbrace{3^n}_{a_n} \cdot 3 \Rightarrow a_{n+1} = a_n \cdot 3 = 3 \cdot a_n$$

b) $(2n+1)_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$$a_{n+1} = 2(n+1) + 1 = \underbrace{2n + 2 + 1}_{a_n} \Rightarrow a_{n+1} = a_n + 2$$

c) $(\log x^n)_{n=1}^{\infty}$ pro $x > 0$ $\quad a_1 = \log x$

$$a_{n+1} = \log x^{n+1} = \log(x^n \cdot x) = \underbrace{\log x^n}_{a_n} + \log x$$

$$a_{n+1} = a_n + \log x$$