Čeněk Kodejška
Střední škola aplikované kybernetiky
10/2006

Platí opravdu rovnost $e^{i\pi} = -1$?

1. Výchozí předpoklady rovnice

Je obecně známo, že Taylorův rozvoj funkce sin x a cos x je dán následujícími vztahy:

$$\sin x = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!} + \ldots \qquad (1)$$

$$\cos x = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \ldots \qquad (2)$$

stejně tak jako rozvoj pro e^t:

$$e^t = 1 + t + \tfrac{t^2}{2!} + \tfrac{t^3}{3!} + \tfrac{t^4}{4!} + \tfrac{t^5}{5!} + \tfrac{t^6}{6!} + \tfrac{x^7}{7!} + \ldots \qquad (3)$$

Pokud za *t* dosadíme ryze komplexní číslo *ix*, lze členy obsahující sudé mocniny nahradit výrazem *cos x* a členy liché, po vytknutí imaginární jednotky, můžeme substituovat výrazem *i sin x*, takže lze psát:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad (4)$$

a po dosazení π za *x* konečně obdržíme výsledek, který mnoho matematiků na celém světě považuje za nejsenzačnější matematický výsledek všech dob:

$$e^{i\pi} = -1 \qquad (5)$$

2. Odvození logaritmu ryze komplexního čísla

Uvedenou rovnici (5) logaritmujeme, přičemž **–1** nahradíme výrazem $\boldsymbol{i^2}$. Získáme následující rovnost:

$$i\pi \ln e = \ln i^2 \qquad (6)$$

a po další úpravě:

$$i\pi = 2\ln i \qquad (7)$$

nebo-li

$$\ln i = i\tfrac{\pi}{2} \qquad (8)$$

Dostáváme tedy logaritmus ryze imaginárního komplexního čísla. Obecně pak pro komplexní číslo *bi* dostaneme jeho logaritmus jako

$$\ln(bi) = \ln b + \ln i = \ln b + i\tfrac{\pi}{2} \qquad (9)$$

Pro komplexně sdružené ryze imaginární číslo získáme analogickým postupem (např. tak, že rovnici (5) vynásobíme výrazem i a následným logaritmováním) vztah

$$i\pi \ln e + \ln i = \ln(-i) \qquad (10),$$